МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ І МЕНЕДЖМЕНТІ

Лабораторний практикум

з курсу «Економіко-математичне моделювання»

для студентів спеціальностей 6.030601 – «Менеджмент», 6.030501 – «Економіка підприємства», 6.030509 – «Облік та аудит», 6.030507 – «Маркетинг», 6.030507 – «Інтелектуальна власність»
очної, заочної та дистанційної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 06.12.2012 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2013

УДК 005.311.12:519.863(076.5)
С 42
ББК 65.050.03я73

Рецензенти:
В.В. Прохорова, д-р економ. наук, проф.,
Українська інженерно-педагогічна академія
О.Б. Білоцерківський, канд. техн. наук, доц.,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Скворчевський О.Є.,
С 42 Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : лаборатор. практикум з курсу «Економіко-математичне моделювання» / О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – 96 с.

ISBN

Лабораторний практикум «Оптимізаційні методи і моделі» містить лабораторні роботи за основними розділами відповідного циклу з курсу «Економіко-математичне моделювання». Як інструментарій для виконання робіт пропонується використовувати Microsoft Excel та Mathcad.

Призначено для студентів, що навчаються за спеціальностями економічного та менеджерського профілю, викладачів та інженерно-технічних працівників ВНЗ, спеціалістів.

Іл. 56. Табл. 35. Бібліогр. 19 назв.

УДК 005.311.12:519.863(076.5)
ББК 65.050.03я73
ISBN
© Скворчевський О.Є.,
Товажнянський В.Л., 2013
© НТУ «ХПІ», 2013

Зміст

Вступ……4
1. Лабораторна робота 1.Основи Microsoft Excel…….....6
2. Лабораторна робота 2. Основи Mathcad……13
3. Лабораторна робота 3.Рішення задачі міжгалузевого балансу засобами Microsoft Excel ……...……..……... 24
4. Лабораторна робота 4. Рішення одноіндексної задачі лінійного програмування, на прикладі оптимізації закупівель……..…. 32
5. Лабораторна робота 5. Рішення класичної транспортної задачі засобами Microsoft Excel……...……. 48
6. Лабораторна робота 6.Рішення задачі про призначення засобами Microsoft Excel……...……..…… 61
7. Лабораторна робота 7. Рішення задачі нелінійного програмування на прикладі статичної детермінованої бездефіцитної моделі управління запасами……...……... 72
Додатки
Додаток 1 – Результат та оформлення лабораторної роботи 1…….. 80
Додаток 2 – Результат та оформлення лабораторної роботи 2……... 81
Додаток 3 – Результат та оформлення лабораторної роботи 3……... 82
Додаток 4 – Результат та оформлення лабораторної роботи 4……... 84
Додаток 5 – Результат та оформлення лабораторної роботи 5……... 87
Додаток 6 – Результат та оформлення лабораторної роботи 6……... 91
Додаток 7 – Результат та оформлення лабораторної роботи 7……... 92

ВСТУП

Сучасна економічна наука стає все більш математизованою дисципліною. Із часу заснування Нобелівської премії з економіки 1969 року більшість премій надається саме за досягнення у галузі економіко-математичних досліджень. Як приклад можна навести Нобелівські премії, які одержали Рагнар Фріш та Ян Тінберген (1969), Васіль Леонтьев (1973), Лєонід Канторович та Тьялінг Купманс (1975), Лоуренс Клейн (1980), Трюгве Хаавельмо (1989), Джон Харсаньі, Джон Неш та Райнхард Зелтен (1994), Джеімс Хекман та Денієл Макфаден (2000), Роберт Ігл (2003), Клайв Гренджер (2003), Роберт Ауман та Томас Шелінг (2005), Леонід Гурвіч, Ерік Мескін, Роджер Майєрсон (2007). Таке широке застосування математичних методів в економіці може бути пояснено двома основними причинами: з одного боку, це значне ускладнення економічних явищ та процесів, а з іншого – бурхливий розвиток прикладної математики та комп'ютерної техніки. Таким чином, незважаючи на складність економіки, пов'язану в першу чергу із значною кількістю одночасно та сукупно діючих факторів, серед яких є і випадкові, сучасні економіко-математичні методи та моделі дозволяють досить адекватно досліджувати реальні економічні явища та процеси.

Одним із найважливіших напрямків економіко-математичного моделювання є оптимізаційні методи і моделі. Вивчення цього напрямку економіко-математичних методів і моделей є невід'ємною частиною базової підготовки економістів, менеджерів, маркетологів. Глибокі знання оптимізаційних методів і моделей необхідні для успішного засвоєння курсів «Методи прийняття управлінських рішень», «Логістика» та ін. Також важливість цього курсу полягає не тільки у вивченні сучасних комп'ютерних

методів математичного моделювання в економіці, але і у формуванні чіткості, ясності та дисципліни мислення у студентів.

Лабораторний практикум призначено для фахівців із загальною економічною підготовкою, тому автори ставили за мету викласти практичні підходи до комп'ютерного моделювання в економіці, менеджменті та маркетингу. Теоретичні аспекти викладені в такому обсязі та під таким кутом, щоб була зрозуміла сутність алгоритму роботи того чи іншого програмного продукту, що пропонується для рішення прикладних економічних задач. Але ж при вивченні курсу «Оптимізаційні методи і моделі» не варто нехтувати теоретичними розділами. Глибоке засвоєння теоретичного матеріалу студентами, дозволить майбутнім фахівцям вирішувати не тільки прикладні задачі викладені у посібнику, але і широке коло їх модифікацій, що може зустрітися на практиці.

Необхідно висловити подяку п'яти поколінням студентів яким читається курс економіко-математичне моделювання. Постійна, жива, активна взаємодія із студентами та корегування лекційної та лабораторної частини курсу так, щоб він був максимально доступним для їх розуміння, не спрощуючи при цьому матеріал, дозволило створити цей навчальний посібник. Зрозуміло, що сучасне економіко-математичне моделювання, в тому числі оптимізаційні методи і моделі, розрослися настільки, що в рамках одного навчального семестру можливо розглянути лише їх базові поняття та розділи. Будемо вдячні за усі конструктивні зауваження, щодо стилю викладення матеріалу та змісту лабораторного практикуму.

При вивченні курсу «Оптимізаційні методи та моделі» необхідно розуміти, що управлінські рішення, отримані за допомогою математичного моделювання, можуть носити лише рекомендований характер. Це пов'язано із складністю економічних явищ та процесів, впливом випадкових факторів, які часто неможливо передбачити. Але ж не можна не погодитись зі словами відомого американського фахівця у галузі дослідження операцій Т. Сааті, який характеризує застосування математичних методів в економіці як «мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які даються ще гірші відповіді іншими способами».

Лабораторно-практична робота 1
ОСНОВИ MICROSOFT EXCEL

Мета роботи – набуття студентами практичних навичок створення, редагування та друкування електронних таблиць Microsoft Excel. Використання відносних, абсолютних та змішаних посилань на комірки для ефективної реалізації розрахунків у Microsoft Excel.

1.1. Робоче вікно Microsoft Excel

При першому запуску Microsoft Excel на екран виводиться вікно, що містить елементи керування, які відповідають стандартній настройці. Це вікно умовно можна розділити на кілька ділянок (рис. 1.1).

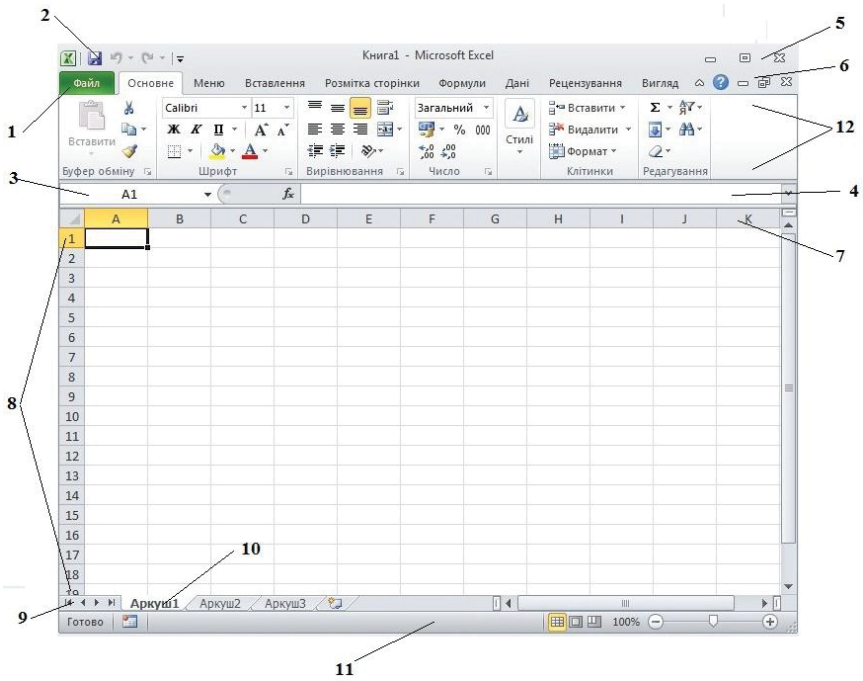


Рисунок 1.1 – Робоче вікно Microsoft Excel

Ділянки вікна **Microsoft Excel 2010 при стандартному настроюванні перераховані** нижче.

1. *Вкладка* Файл. У версії **Microsoft Office 2010 у кожного додатка є така** вкладка, що замінила собою кнопку Office версії 2007. Набір команд, доступ до яких відкривається при натисканні на цю кнопку, дозволяє виконувати звичайні дії. У більш ранніх версіях офісних програм ці команди перебували в меню Файл. Це, зокрема, команди створення, збереження і відкриття документів.

2. *Панель швидкого доступу.* При створенні документів того або іншого типу ми часто використовуємо ті самі команди. Щоб щораз не «блукати» у пошуку потрібної команди по всьому інтерфейсу програми, самі «популярні» команди винесені на панель швидкого доступу у вигляді маленьких кнопок з картинками. Ці кнопки називають інструменти, і клацання мишею на кожній з них приводить до виконання відповідної команди Microsoft Excel. Панель швидкого доступу настроюється. За замовчуванням на ній усього три кнопки, але шляхом настроювання на неї можна вивести будь-яку кількість команд Microsoft Excel.

3. *Поле завдання імені об'єкта*. Це зручний засіб для призначення імен різним об'єктам: таблицям, рисункам, діаграмам, окремим коміркам і групам комірок. Надалі можна здійснювати доступ до іменованих об'єктів за їх іменами.

4. *Рядок формул*. У цей рядок ви будете вводити формули для обчислення різних значень. Цей рядок дозволяє редагувати текст уже введеної формули або переглядати його в тому випадку, якщо в самій таблиці замість формул відображаються їхні обчислені значення.

5. *Кнопки керування основним вікном програми*. Ці кнопки дозволяють розгорнути, згорнути в кнопку або закрити основне вікно Microsoft Excel.

6. *Кнопки керування дочірніми вікнами програми*. Ці кнопки дозволяють розвертати, звертати й закривати окремі книги Microsoft Excel усередині основного вікна, яке при цьому залишається відкритим.

7. *Заголовки стовпців таблиці*. Для доступу до окремих комірок усередині електронної таблиці використовуються імена комірок, що показують комбінацію імені стовпця і номера рядка, на перетині яких перебуває комірка.

8. *Номери рядків таблиці*. Методика доступу до комірок у таблиці Microsoft Excel нагадує гру «морський бій» і не повинна викликати ускладнень.

9. *Навігатор по аркушах книги*. Книга Microsoft Excel за замовчуванням містить 3 таблиці, які називаються листами. Але кількість аркушів у книзі не обмежена нічим, крім обсягу доступної фізичної пам'яті комп'ютера (оскільки книга завантажується на пам'ять комп'ютера цілком). Таким чином, аркушів у книзі може виявитися набагато більше, ніж може поміститися в ділянці відображення їх ярликів. У цьому випадку «прокручування» ярликів усередині відведеної для них зони можна здійснювати за допомогою навігатора.

10. *Ярлики аркушів*. За замовчуванням у книзі Microsoft Excel листки мають імена Лист 1, Лист 2 і Лист 3. Однак користувач може давати листкам інші довільні імена, а також змінювати існуючі стандартні імена аркушів.

11. *Рядок стану*. У цьому рядку ідентифікується стан тих або інших параметрів Microsoft Excel, а також деяких властивостей документа, що редагується. Різні ділянки рядка стану не тільки є індикаторами, але одночасно виступають як інструменти. Це означає, що клацання на деяких знаках рядка стану дозволяє змінити відповідний параметр.

12. *Стрічка інструментів.*У Microsoft Excel 2010 ви не знайдете команд меню, до яких, можливо, уже звикли в інших програмах Windows. Усі команди, які можна виконати в Microsoft Excel, об'єднані в групи за функціями і відображаються тепер тільки у вигляді знаків (інструментів). На перший погляд, це може здатися незручним, оскільки відсутній текст. При наведенні покажчика миші на кожен із інструментів ви побачите розгорнуту і докладну підказку, яка, безумовно, дає куди більше інформації про інструмент (або команду), ніж одне-два слова в назві команди в меню.

Так виглядає вікно **Microsoft Excel при стандартному** настроюванні. Справа в тому, що діапазон, в якому можна змінювати зовнішній вигляд цієї програми, додаючи і забираючи ті або інші елементи інтерфейсу та інструменти, дуже великий. Завдяки такій гнучкості ви можете легко настроїти Microsoft Excel «під себе», змінивши ряд параметрів, і зовні програма може при цьому дуже сильно змінитися.

1.2. Створення та редагування електронної таблиці

Для створення електронної таблиці доцільно в комірки внести необхідні дані, підібравши відповідну ширину стовпчиків та висоту рядків. Потім виділити отриманий діапазон рядків правою кнопкою миші (рис. 1.2) та обрати

«Формат комірок». У діалоговому вікні «Формат комірок» обрати закладку «Границя». Визначити необхідний тип лінії та границю (рис. 1.2).

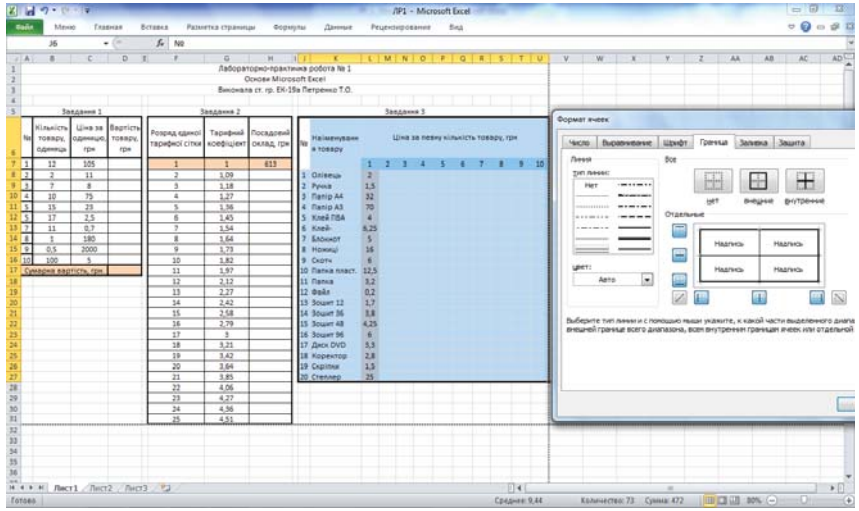


Рисунок 1.2 – Створення та редагування електронної таблиці із використанням діалогового вікна «Формат комірки»

Іншим способом створення та редагування електронної таблиці є функція «Настройка границь виділених комірок або тексту» в закладці «Меню». Однак діалогове вікно «Формат комірки» є більш універсальним методом, що залишається практично незмінним для всіх версій Microsoft Excel.

1.3. Ефективна реалізація розрахунків у Microsoft Excel

У Microsoft Excel прийнята лінійна форма запису формул у відповідному рядку 4 рис. 1.1. Вводити функції можна за допомогою майстра функцій або клавіатури. Як аргументи функції можуть виступати числа, посилання на комірки, текстова інформація. Комірка, в якій вводиться формула, називається *залежною*, а комірка, в якій записаний аргумент цієї формули, – *впливаючою*. Очевидно, що одна і та ж сама комірка може розглядатися і як залежна, і як впливаюча дивлячись, яку формулу ми розглядаємо.

Наприклад, розглянемо завдання 1 лабораторної роботи. Необхідно кількість товару помножити на його ціну із подальшим знаходженням сумарної вартості покупки. Для цього помножимо комірку із кількістю товару на комірку із ціною. Розповсюдимо отриману формулу на весь необхідний діапазон. Отримаємо автосуму добутків за допомогою функції СУММ (рис. 1.3). Для формули, яка показана на рис. 1.3, залежною коміркою є D7, а впливаючими B7 та C7. У той же час комірка D7 є впливаючою відносно формули в залежній комірці D17.

Залежно від поведінки посилань на впливаючі комірки вони поділяються на відносні, абсолютні та змішані.

Відносні посилання – посилання на впливаючі комірки, адреса яких змінюється, як по рядку, так і по стовпчику, відносно зсуву впливаючої комірки при копіюванні. Приклад запису A1, D17, E20 и т.п.

При реалізації розрахунків, які подані на рис. 1.3, використовувалися виключно відносні посилання, однак це не завжди зручно.

Абсолютні посилання – посилання на впливаючі комірки, адреса яких залишається зафіксованою при копіюванні залежної комірки. Приклад запису $A$1, $D$17, $E$20 и т.ін.

Використання абсолютних посилань на комірки розглянемо на такому прикладі. Маємо тарифні коефіцієнти для 25-ти розрядів єдиної тарифної сітки та посадову ставку для першого розряду. Шляхом множення ставки для першого розряду на відповідні тарифні коефіцієнти необхідно знайти посадові ставки для кожного розряду єдиної тарифної сітки. Для цього в рядку введення формули зробимо посилання на комірку із посадовою ставкою першого розряду. Шляхом натискання на кнопку F4 перетворимо відносне посилання в абсолютне. Отриману комірку помножимо на тарифний коефіцієнт другого розряду. Це посилання залишимо відносним (рис. 1.4).

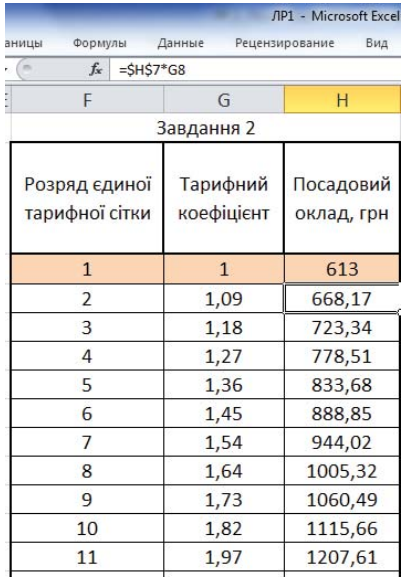
Так при копіюванні отриманої формули посилання на посадову ставку першого розряду залишиться зафіксованим, а посилання на тарифні коефіцієнти будуть змінюватися для кожного розряду єдиної тарифної сітки.

Змішані посилання – посилання на впливаючі комірки, адреса яких змінюється, тільки по рядку або тільки по стовпчику, відносно зсуву впливаючої комірки при копіюванні, причому інша частина посилання (стовпчик або рядок) залишається зафіксованою. Приклад запису змішаного

посилання із зафіксованим стовпчиком $A1, $D17, $E20. Приклад запису змішаного посилання із зафіксованим рядком A$1, D$17, E$20. Як бачимо, зафіксованою залишається та частина посилання, перед якою стоїть знак «$».

	A	B	C	D
5	Завдання 1			
6	№	Кількість товару, одиниць	Ціна за одиницю, грн	Вартість товару, грн
7	1	12	105	1260
8	2	2	11	22
9	3	7	8	56
10	4	10	75	750
11	5	15	23	345
12	5	17	2,5	42,5
13	7	11	0,7	7,7
14	8	1	180	180
15	9	0,5	2000	1000
16	10	100	5	500
17	Сумарна вартість, грн.			4163,20

Рисунок 1.3 – Реалізація розрахунків із використанням відносних посилань на комірки



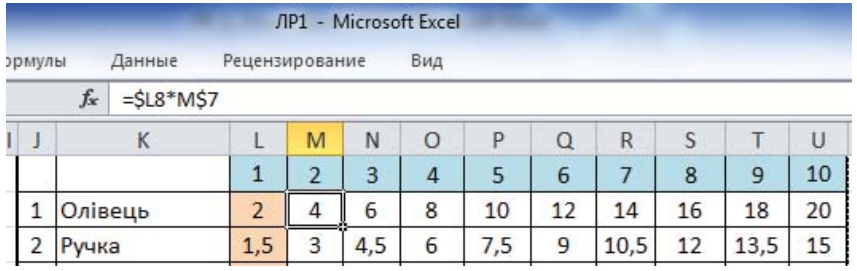
F	G	H
Завдання 2		
Розряд єдиної тарифної сітки	Тарифний коефіцієнт	Посадовий оклад, грн
1	1	613
2	1,09	668,17
3	1,18	723,34
4	1,27	778,51
5	1,36	833,68
6	1,45	888,85
7	1,54	944,02
8	1,64	1005,32
9	1,73	1060,49
10	1,82	1115,66
11	1,97	1207,61

Рисунок 1.4 – Реалізація розрахунків із використанням абсолютних та відносних посилань на комірки

Використання змішаних посилань розглянемо в рамках третього завдання лабораторної роботи. Маємо 20 видів товару, ціна кожного із яких відома. Необхідно розрахувати таблицю вартостей товару для різної їх кількості від 2-х до 10-ти шт. Очевидно, що в рядку введення формули необхідно ввести добуток ціни товару на кількість. Причому при посиланні на комірку із ціною товару фіксуємо тільки стовпчик, шляхом натискання на кнопку F4 три рази. При посиланні на комірку із кількістю товару фіксуємо тільки рядок, шляхом натискання на кнопку F4 два рази (рис. 1.5).

При поширенні формули на весь потрібний діапазон ми можемо переконатися в доцільності використання тут змішаних посилань на комірки.

Перехід від відносних до абсолютних, а потім змішаних посилань може здійснюватися шляхом натискання на кнопку F4 по циклу, показаному на рис. 1.6. Очевидно, що знак «$» також можна поставити із клавіатури.



	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	Олівець	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	2	Ручка	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15

Рисунок 1.5 – Реалізація розрахунків із використанням змішаних посилань на комірки

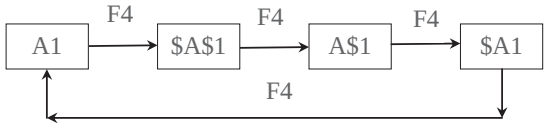


Рисунок 1.6 – Перехід між різними типами посилань

Результат виконання всіх трьох завдань та оформлення лабораторної роботи наведений у додатку 1. Дана лабораторна робота має на меті набуття студентами практичних навичок роботи в Microsoft Excel, тому може бути виконана за одним варіантом, що розглядається вище.

Список рекомендованої літератури

1. Microsoft Excel 2010 Interactive Guide RUS – Microsoft Corporation, 2010.
2. Сингаевская Г.И. Функции в Microsoft Office Excel 2010 / Г.И. Сингаевская. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2011. – 1094 с.
3. Долженков В.А. Microsoft Office Excel / В.А. Долженков, А.С. Струченков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 816 с.
4. Курбатова Е.А. Microsoft Office Excel 2010. Самоучитель / Е.А. Курбатова – М. : Диалектика, 2010. – 416 с.

Лабораторна робота 2
ОСНОВИ MATHCAD

Мета роботи – вивчення основних принципів роботи в Mathcad.

2.1 Інтерфейс Mathcad 14

Mathcad дуже зручний у користуванні, написання математичних виразів практично співпадає із написанням їх на папері. Програма обладнана системою динамічних підказок. Також указує користувачеві на *допущені помилки*, виділяючи їх *червоним кольором*. Однак для ефективної роботи в Mathcad користувач має володіти елементарними навичками математичної культури. Головне вікно показано на рис. 2.1. Після настройок воно може мати інший вигляд, зручний для роботи конкретного користувача.

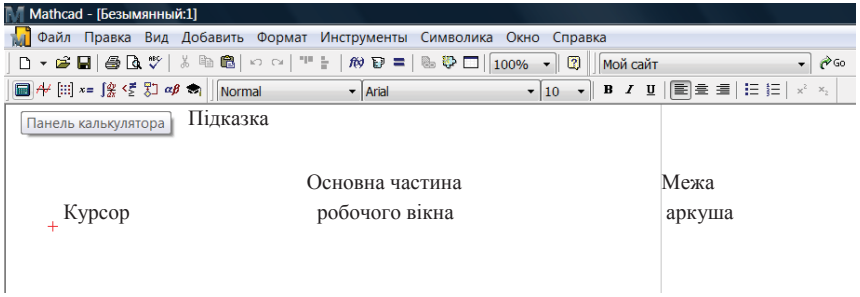


Рисунок 2.1 – Головне вікно системи та елементи інтерфейсу

При роботі із Mathcad потрібно вирізняти математичний (рис. 2.2, а) та текстовий (рис.2.2, б) редактори. Очевидно, що при наборі формул у текстовому редакторі математичні операції над ними здійснюватися не будуть. Перехід від математичного редактора в текстовий здійснюється шляхом натискання одночасно із набором тексту клавіші пропуску

а *б*

Рисунок 2.2 – Математичний та текстовий редактори Mathcad

Для роботи із Mathcad використовуються різні панелі інструментів. Порядок виведення цих панелей на екран показаний на рис. 2.3.

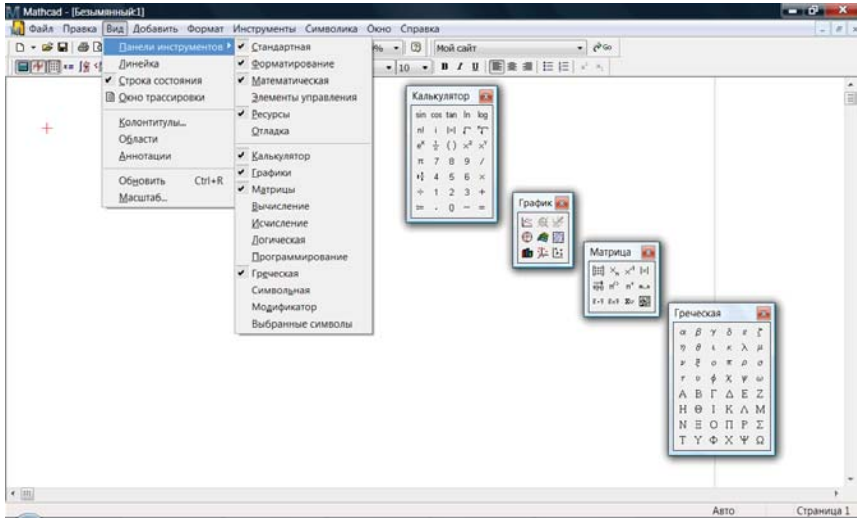


Рисунок 2.3 – Порядок виведення панелей інструментів Mathcad 14 на екран

2.2. Організація алгебричних розрахунків в Mathcad

Хоча інтерфейс програми достатньо простий, а її освоєння здійснюється практично інтуїтивно, потрібно знати певні принципи роботи Mathcad, які справедливі навіть для найпростіших алгебричних розрахунків.

Mathcad розрізняє регістр заголовних та малих літер. Тобто X та x він сприймає як різні позначення.

Десяткові дроби записуються через крапку, наприклад 2.3, 1.5, 6.3 і т.п. Кількість знаків після коми можна встановити у діалоговому вікні, яке з'являється після подвійного натискання на дробі.

За допомогою оператора присвоєння «:=» (вводиться як Shift та «:») здійснюється задача числових значень змінних та запис формул. Знак «=» запускає процес розрахунків (рис. 2.4).

При такому записі формул, який показаний на рис 2.4, спочатку задаються значення змінних, а лише потім записуються формули з їх використанням. В іншому разі MathCAD буде вказувати на помилку. Послідовність запису – зліва направо та зверху вниз. Рівняння, яке показано на

рис. 2.4 може бути записано у вигляді функції, тоді порядок обчислення значення цієї функції при певних аргументах буде іншим (рис. 2.5).

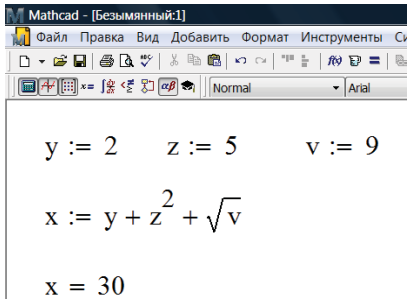


Рисунок 2.4 – Реалізація арифметичних розрахунків у Mathcad

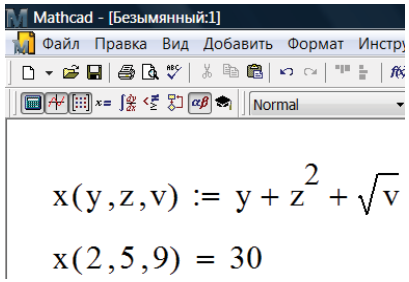


Рисунок 2.5 – Запис функцій у Mathcad

Організація алгебричних розрахунків, в основному, здійснюється за допомогою панелі інструментів «Калькулятор» (рис. 2.3).

2.3 Основні графічні можливості Mathcad

Перед побудовою графіка в документі необхідно ввести функції, графік яких буде будуватися. Для побудови двомірного графіка в декартовій системі координат використовується клавіша «*X-Y* графік» на панелі інструментів графіки. Після її натискання з'являється вікно для побудови графіка, причому на одному графіку можна будувати декілька функцій (рис. 2.6).

Для побудови декількох функцій на одному графіку необхідно після введення першої функції у відповідну мітку-заповнювач поставити кому. Після цього з'явиться мітка-заповнювач для наступної функції і т.п.

У мітці заповнювачі верхньої та нижньої меж функції і аргументів необхідно внести потрібні числові діапазони. Якщо цього не зробити графічний редактор Mathcad визначить ці діапазони автоматично.

Панель форматування графіка (рис. 2.7) викликається шляхом подвійного натискання лівої кнопки миші на графіку. Для закріплення навичок роботи із двовимірними графіками в Mathcad студентам необхідно викликати панель форматування побудованого графіка та настроїти оформлення графіка за вказівкою викладача.

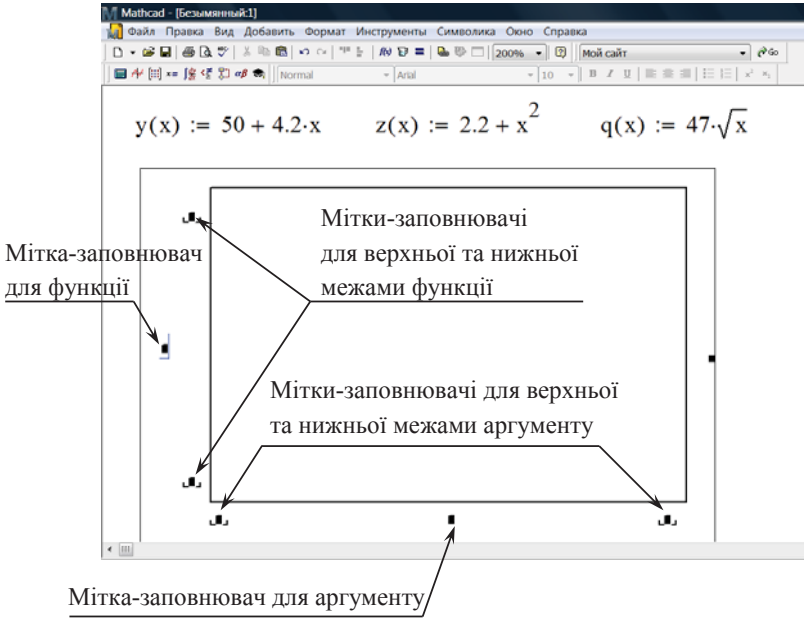


Рисунок 2.6 – Вікно для побудови двовимірного графіка в Mathcad

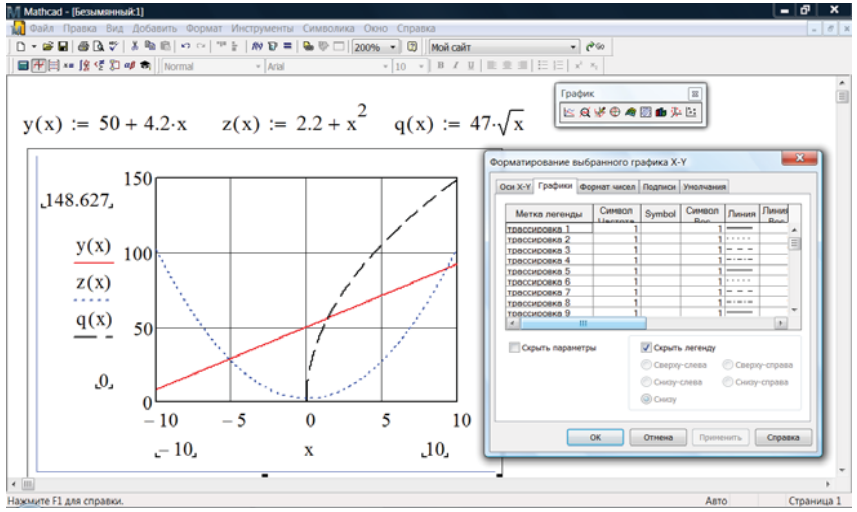


Рисунок 2.7 – Побудова двовимірного графіка функції в Mathcad

Для побудови тривимірного графіка використовується клавіша «Графік поверхні» на панелі інструментів графіка. Після її натискання з'явиться вікно для побудови тривимірного графіка, в мітці-заповнювачі якого необхідно написати *CreateMesh* та в дужках указати функцію (рис. 2.8).

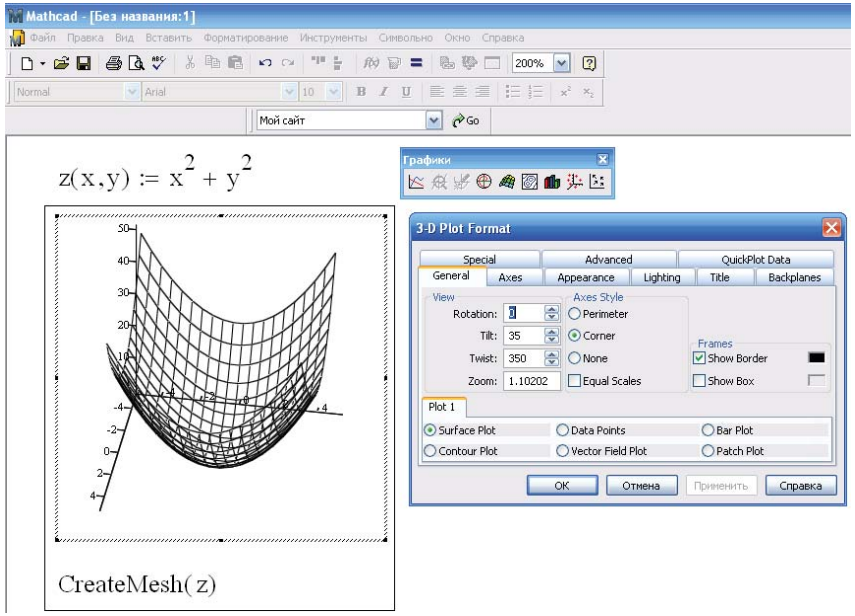


Рисунок 2.8 – Побудова тривимірного графіка функції в Mathcad

2.4. Робота із матрицями в Mathcad

Основні функції для роботи із матрицями винесені на відповідну панель (рис. 2.9). Позначення цих функцій та матричні розрахунки значною мірою співпадають зі звичайним написом на папері, тому освоєння роботи із матрицями в Mathcad здійснюється практично інтуїтивно. При виникненні питання можна звернутися до динамічної підказки.

Для створення матриці використовується позначка ⊞, яка натискається після написання букви, якою позначається матриця та знак присвоєння. Після натискання на позначку ⊞ з'являється панель «Вставка матриці», за допомогою якої визначається кількість рядків та стовпців матриці (рис. 2.9).

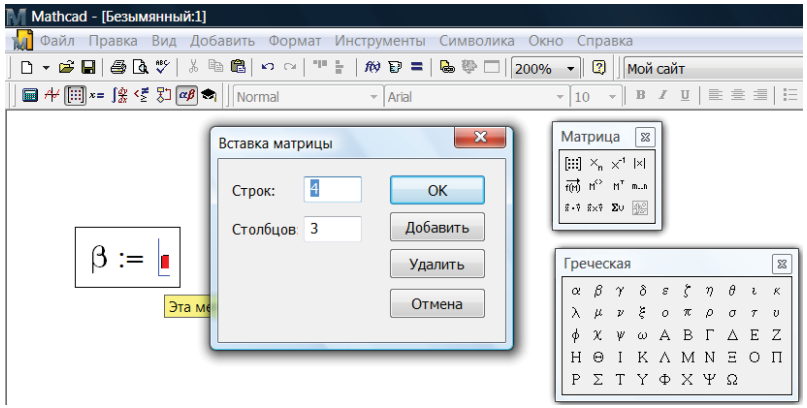


Рисунок 2.9 – Створення матриці в Mathcad

Після натискання на ОК з'явиться матриця, в яку потрібно внести числові значення (рис. 2.10). Також на рис 2.10 показано завдання матриці у вигляді таблиці. Така форма запису теж придатна для виконання розрахунків.

Елементи матриці визначаються за допомогою нижніх індексів, які записуються через кому (рис. 2.10).

Як було сказано вище, освоєння операцій роботи із матрицями може бути здійснене інтуїтивно. Приклад роботи із матрицями наведений на рис. 2.11.

Примітка. *При роботі із Mathcad потрібно пам'ятати, що тут застосована американська система нумерації, тобто нумерація починається не з 1, а із 0, якщо за допомогою оператора ORIGIN не вказано інше.*

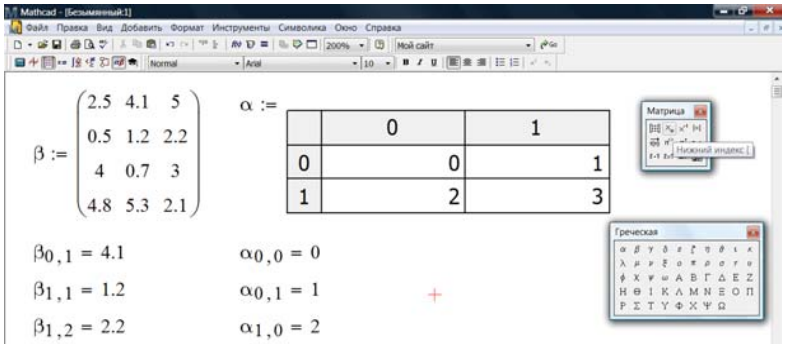


Рисунок 2.10 – Форми завдання матриць та їх елементів у Mathcad

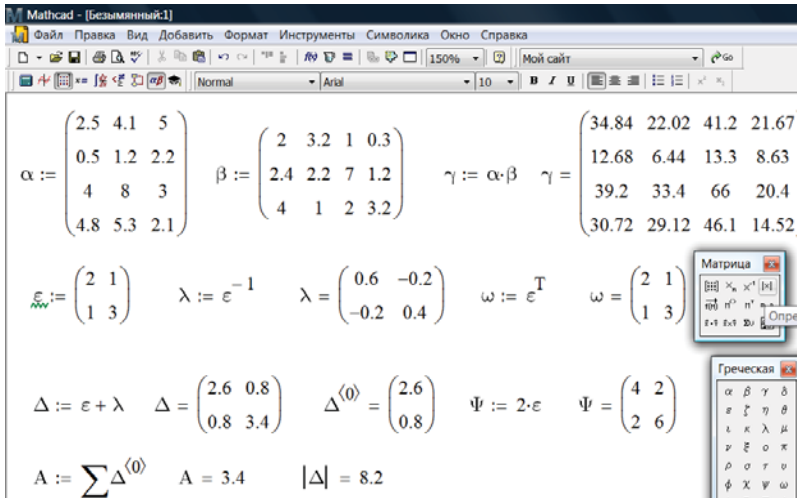


Рисунок 2.11 – Операції із матрицями у Mathcad

2.5. Обмін даними між Mathcad та Microsoft Excel

Для перенесення даних із Microsoft Excel у Mathcad необхідно:

1) створити таблицю (рис. 2.12);

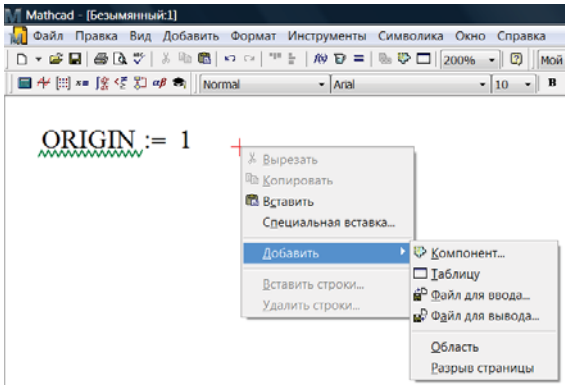


Рисунок 2.12 – Створення таблиці у Mathcad

2) виділити першу комірку таблиці, визвати правою кнопкою миші меню та обрати «ІМПОРТ» (рис. 2.13);

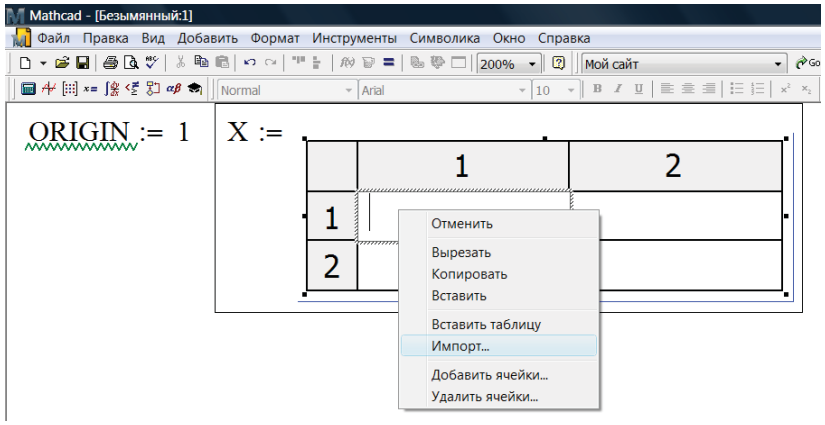


Рисунок 2.13 – Перший етап імпорту даних із Microsoft Excel у Mathcad

3) у вікні, яке з'явилося, обрати формат файлу, указати шлях до нього та натиснути «Далі» (рис. 2.14);

4) вказати аркуш, з якого імпортуються дані та діапазон комірок (рис. 2.15). Натиснути «Готово». Дані імпортовані із таблиці Microsoft Excel в таблицю Mathcad, в якій можна виконувати допустимі матричні обчислення.

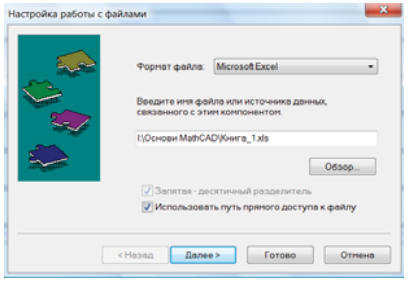


Рисунок 2.14 – Визначення файлу Microsoft Excel з якого імпортуються дані

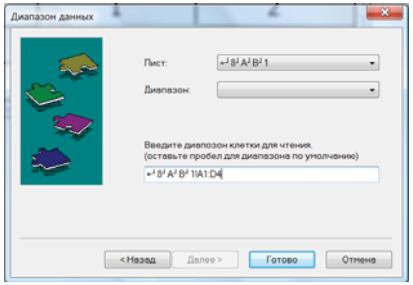


Рисунок 2.15 – Визначення аркуша Microsoft Excel та діапазону комірок, з якого імпортуються дані

При імпорті даних із Microsoft Excel у Mathcad необхідно пам'ятати, що імпортовані дані автоматично не зміняться при їх зміні у вихідному файлі.

Примітка. *Імпорт даних у Mathcad 14 може здійснюватися тільки із файлів з розширенням «**.xls**». При необхідності імпорту даних із файлів з розширенням «**.xlsx**» їх необхідно зберегти в* Microsoft Excel*, як «Книга Excel 97-2003».*

2.5. Варіанти завдань для закріплення навичок роботи в Mathcad

Для закріплення навичок роботи в Mathcad необхідно виконати такі завдання. Перш за все, потрібно вказати параметри сторінки: формат А4, книжна орієнтація, лівий берег аркуша – 2,5 см, правий – 1 см, верхній та нижній – 1,5 см. Потім необхідно настроїти панелі інструментів. Панелі інструментів «Калькулятор», «Графіки», «Матриці», «Грецькі символи» потрібно викликати обов'язково. Індивідуальні завдання наведені у таблиці 2.1. Номер варіанта відповідає номеру комп'ютера, за яким воно виконується.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань

№	Завдання			
	Визначити значення *m*, *n*, *l* при відомих значеннях змінних α, β, γ	Записати *m*, *n*, *l*, як функції від α, β, γ та визначити значення цих функцій	В одному вікні побудувати графіки функцій. Настроїти оформлення графіків згідно із прикладом, наведеним у додатку	Побудувати тривимірний графік функції двох змінних
1	2	3	4	5
1.	$\alpha = 2{,}5;\quad \beta = 4{,}8,\quad \gamma = 6{,}2;$ $m = \alpha^2 - \sqrt[3]{\beta} + \gamma;\ n = \gamma \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}};$ $k = \gamma^4 \cdot \sin(\alpha \cdot \beta)$		$y(x) = 21 - 3 \cdot x;$ $z(x) = 1{,}1 \cdot x^2;$ $q(x) = 43{,}2 \cdot \sqrt{x}$	$z(x, y) = x^2 + y$
2.	$\alpha = 6{,}5;\quad \beta = 3{,}2,\quad \gamma = 7{,}5;$ $m = \alpha - \sqrt[3]{\beta} + \gamma^3;\ n = \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha};$ $k = \gamma^4 \cdot \cos(\alpha \cdot \beta)$		$y(x) = \cos(x);$ $z(x) = 0{,}3 - 0{,}12 \cdot x;$ $q(x) = \frac{0{,}18}{x} + 0{,}2$	$z(x, y) = x + y^2$
3.	$\alpha = 1{,}5;\quad \beta = 0{,}5,\quad \gamma = 6{,}3;$ $m = \alpha^2 - \beta + \sin(\gamma);\ n = \frac{\beta \cdot \gamma}{\sqrt{\alpha}};$ $k = \sin(\alpha \cdot \beta^{0{,}5}) \cdot \sqrt{\gamma}.$		$y(x) = \tan(x);$ $z(x) = 0{,}05 \cdot x^3;$ $q(x) = 2 - 2{,}3 \cdot x$	$z(x, y) = x^3 + y^3$

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5
4.	$\alpha = 8.2;\quad \beta = 15.4,\quad \gamma = 12.5;$ $m = \alpha^2 - \beta + \sqrt[3]{\gamma};\ n = \frac{\lvert\sin(\gamma)\rvert}{\alpha \cdot \beta};$ $k = 2 \cdot \alpha - \sqrt{\beta \cdot \gamma}.$		$y(x) = 19.3 + 5 \cdot x;$ $z(x) = 1.5 \cdot x^2;$ $q(x) = 38 \cdot \sqrt{x}.$	$z(x, y) = x^3 + y$
5.	$\alpha = 7{,}5;\quad \beta = 5{,}3,\quad \gamma = 14{,}5;$ $m = \alpha - 0{,}5 \cdot \beta + \gamma^2;\ n = \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha};$ $k = \lvert\sin(\alpha \cdot \beta)\rvert \cdot \gamma + \alpha$		$y(x) = \frac{1}{x} + 5{,}5;$ $z(x) = 1{,}4 \cdot \lvert x\rvert;$ $q(x) = 5{,}2 + 0{,}4 \cdot x.$	$z(x, y) = x + y^3$
6.	$\alpha = 1{,}2;\quad \beta = 2{,}5,\quad \gamma = 20;$ $m = \alpha^2 + \lvert\sin(\gamma - \beta);\rvert\ n = \frac{\alpha^3}{\beta \cdot \gamma};$ $k = \tan(\alpha \cdot \gamma) \cdot \sqrt{\beta}$		$y(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 10{,}2;$ $z(x) = 1.2 \cdot \lvert x\rvert + 5;$ $q(x) = \frac{1}{x} + 5{,}5.$	$z(x, y) = x^2 + y^3$
7.	$\alpha = 11;\quad \beta = 17{,}5,\quad \gamma = 20;$ $m = 2{,}1 \cdot \alpha - \sqrt{\beta \cdot \gamma};\quad n = \frac{\alpha + \beta^2}{\beta \cdot \gamma};$ $k = \tan(\alpha) \cdot \sqrt{\beta} - \gamma$		$y(x) = 50 - 5{,}7 \cdot x;$ $z(x) = 1{,}2 \cdot x^2;$ $q(x) = 40 \cdot \sqrt{x} + x$	$z(x, y) = x^3 + y^2$
8.	$\alpha = 27{,}9;\quad \beta = 28,\quad \gamma = 19{,}5;$ $m = \frac{1}{\alpha} + \beta - \sqrt{\gamma},\quad n = \alpha \cdot \tan(\beta \cdot \gamma);$ $k = 2 + \alpha \cdot \sqrt{\beta} - \sqrt[3]{\gamma}$		$y(x) = -\tan(x);$ $z(x) = 0{,}03 \cdot x^3;$ $q(x) = 1{,}8 - 2 \cdot x$	$z(x, y) = x^4 + y$
9.	$\alpha = 2{,}3;\quad \beta = 5{,}8,\quad \gamma = 6{,}2;$ $m = \alpha^2 - \sqrt{\beta} + \gamma;\quad n = \beta \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}};$ $k = \cos(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma^2$		$y(x) = \sin(0{,}7 \cdot x);$ $z(x) = 0{,}2 + 0{,}08 \cdot x;$ $q(x) = \frac{0{,}25}{x}$	$z(x, y) = x + y^4$
10.	$\alpha = 0{,}5;\quad \beta = 3{,}2,\quad \gamma = 7{,}4;$ $m = \alpha \cdot \gamma - \sqrt{\beta} + \gamma^3;\ n = \frac{\beta - \sqrt{\gamma}}{\alpha};$ $k = \alpha \cdot (\beta^2 + \gamma^2)$		$y(x) = 60 + 4{,}2 \cdot x;$ $z(x) = 2{,}1 \cdot x^2;$ $q(x) = 36{,}6 \cdot \sqrt{x} - x.$	$z(x, y) = x^4 + y^3$
11.	$\alpha = 6{,}4;\quad \beta = 5{,}3,\quad \gamma = 4{,}5;$ $m = \alpha^2 - 1{,}5 \cdot \beta + \gamma;\ n = \gamma \cdot \frac{\beta - \gamma}{\alpha^2};$ $k = \lvert\cos(\alpha \cdot \beta)\rvert + \beta \cdot \gamma$		$y(x) = 1{,}2 \cdot \sin(x);$ $z(x) = 0{,}8 + 0{,}12 \cdot x;$ $q(x) = \frac{0{,}23}{x}.$	$z(x, y) = x^4 + y^2$
12.	$\alpha = 2{,}5;\quad \beta = 7{,}3,\quad \gamma = 8{,}5;$ $m = \alpha^2 \cdot \gamma + 2 \cdot \sqrt{\beta \cdot \gamma};\quad n = \frac{\beta^2}{\alpha \cdot \gamma};$ $k = \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\beta} + \frac{1}{\gamma}$		$y(x) = 100 + 140 \cdot x;$ $z(x) = 1{,}9 \cdot x^3;$ $q(x) = 537{,}4 \cdot \sqrt{x}$	$z(x, y) = x^3 + y^4$

Результат виконання всіх завдань та оформлення лабораторні роботи наведений у додатку 2.

Список рекомендованої літератури

1. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. / Д.В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 560 с.
2. Половко А.М. Mathcad для студента. / А.М. Половко, И.В. Ганичев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.
3. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: Учебное пособие. 2-е изд. испр. и доп. / В.А. Охорзин. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.
4. Черняк А.А. Математика для экономистов на базе Mathcad. / А.А. Черняк. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.
5. Плис А.И. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

Лабораторна робота 3
РІШЕННЯ ЗАДАЧІ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL

Мета роботи – вивчення принципів побудови економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу засобами Microsoft Excel.

3.1. Робота із матрицями в Microsoft Excel

Міжгалузевий баланс (МГБ) для n галузей є таблицею, тому розрахунки за економіко-математичною моделлю МГБ здійснюються, в основному, в матричній формі. Для виконання даної лабораторної роботи необхідно розглянути засоби роботи із матрицями в Microsoft Excel.

Матриця – прямокутна таблиця чисел.

$(m \cdot n)$ - *матриця* – таблиця чисел, що містить *m* рядків і *n* стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{2i} & \dots a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Елемент матриці a_{ij} стоїть на перетинанні *i*-го рядка та *j*-го стовпця. Наприклад, елемент a_{12} стоїть на перетинанні 1-го рядка й 2-го стовпця.

Головна діагональ квадратної $(n \cdot n)$-матриці: a_{11}, $a_{22}, \dots,$ $a_{ii}, \dots, a_{nn}$. Матриця називається *діагональною*, якщо в ній всі елементи поза головною діагоналлю дорівнюють нулю.

Одинична матриця E – це діагональна матриця, на головній діагоналі якої знаходяться одиниці.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Вектор – матриця-рядок $(1 \cdot n)$ або матриця-стовпець $(m \cdot 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Дві матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однакову розмірність і всі їх відповідні елементи рівні, тобто для всіх i, j $a_{ij} = b_{ij}$.

Додавання матриць A і B можливе лише тоді, коли розмірність цих матриць співпадає. Результатом такого додавання буде матриця $C = A+B$, кожен із елементів якої дорівнює $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. В Microsoft Excel додавання матриць реалізується таким чином. Припустимо, маємо дві матриці (рис. 3.1), які необхідно скласти. *Перед проведенням розрахунків із матрицями в Microsoft Excel необхідно визначити розмірність вихідної матриці та виділити потрібний діапазон комірок*. Далі вводиться формула, після чого *для отримання результату при роботі із масивами даних натискається комбінація клавіш Shift, Ctrl, Enter*. Аналогічний принцип віднімання матриць.

Рисунок 3.1 – Додавання матриць у Microsoft Excel

Результатом *множення матриці на число* називається матриця, кожен елемент якої помножений на це число, тобто $C = \lambda \cdot A$, якщо для всіх i, j $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$. Множення матриці на число в Microsoft Excel може бути здійснене шляхом використання відносних та абсолютних посилань на комірки.

Матриця називається *зворотною* до *квадратної* матриці A і позначається A^{-1}, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Не всякі матриці мають зворотну. Матриця A^{-1} існує, якщо *визначник* матриці A не дорівнює нулю. У Microsoft Excel для отримання зворотної матриці застосовується функція МОБР, категорія «Математичні». Для розрахунку визначника матриці – функція МОПРЕД, категорія «Математичні».

Добутком матриць A *та* B називається матриця C, кожен елемент якої є скалярним добутком відповідного рядка першої матриці на відповідний стовпець другої матриці $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$. Добуток матриць $A \cdot B$ існує, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Матриця $C = A \cdot B$ має розмірність $(m \cdot n)$, де m – кількість рядків у першій (зліва) матриці A, n – кількість стовпців у другій (справа) матриці B. У Microsoft Excel для отримання добутку матриць застосовується функція МУМНОЖ, категорія «Математичні».

Транспонована матриця A^T виходить із матриці A, якщо перший рядок записати як перший стовпець, другий рядок записати як другий стовпець, третій рядок записати як третій стовпець, і т.ін. Для транспонування матриць використовується функція ТРАНСП, категорія «Посилання та масиви».

У межах п. 3.1 показані функції, необхідні для побудови МГБ.

3.2. Постановка задачі

В табл. 3.1 наведені коефіцієнти прямих матеріальних витрат для десяти галузей економіки певного регіону:

1) харчова промисловість;
2) вантажний транспорт та зв'язок;
3) нафто- та газовидобування;
4) хімічна та нафтохімічна промисловість;
5) машинобудування та металообробка;
6) електроенергетика;
7) лісова, деревообробна та целюлозно-паперова промисловість;
8) легка промисловість;
9) промисловість будівельних матеріалів;
10) чорна металургія.

Таблиця 3.1 – Матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,037	0,121	0,131	0,026	0,027	0,073	0,092	0,093	0,196	0,053
2	0,031	0,099	0,112	0,225	0,098	0,062	0,082	0,078	0,168	0,045
3	0,076	0,081	0,011	0,041	0,023	0,058	0,069	0,076	0,014	0,041
4	0,038	0,044	0,05	0,099	0,044	0,028	0,035	0,033	0,074	0,021
5	0,037	0,01	0,043	0,098	0,01	0,022	0,034	0,033	0,072	0,019
6	0,014	0,014	0,051	0,035	0,037	0,033	0,013	0,128	0,027	0,023
7	0,072	0,017	0,015	0,029	0,013	0,079	0,166	0,014	0,021	0,058
8	0,011	0,016	0,012	0,028	0,012	0,024	0,098	0,071	0,021	0,052
9	0,051	0,055	0,107	0,067	0,013	0,014	0,039	0,047	0,076	0,027
10	0,019	0,022	0,023	0,048	0,022	0,014	0,017	0,018	0,037	0,011

Кінцеве споживання продукції кожної із галузей складає y_1 = 2901 млн грн, y_2 = 906 млн грн, y_3 = 802 млн грн, y_4 = 403 млн грн, y_5 = 389 млн грн, y_6 = 243 млн грн, y_7 = 249 млн грн, y_8 = 316 млн грн, y_9 = 452 млн грн, y_{10} = 220 млн грн. Необхідно розрахувати за допомогою Microsoft Excel показники МГБ. При виконанні лабораторної роботи матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат співпадає для кожного із варіантів. Показники кінцевого споживання продукції для кожної із галузей обираються студентами із табл. 3.2. Номер варіанта співпадає із номером комп'ютера, за яким виконується робота в обчислювальному центрі.

Таблиця 3.2 – Кінцеве споживання продукції для кожної із галузей

Номер галузі	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1000	810	760	1010	643	403	954	954	403	543	880	342
2	906	400	900	598	428	389	403	300	389	543	1345	839
3	1200	954	954	954	954	320	389	389	340	200	500	707
4	403	403	403	300	268	249	932	1100	249	978	454	1006
5	389	389	389	389	389	1000	451	451	316	1200	324	179
6	340	320	1320	763	763	906	983	983	423	850	973	1071
7	249	249	451	451	351	1200	653	550	1020	763	891	1050
8	316	983	983	983	900	403	283	438	653	380	400	327
9	423	423	423	550	550	341	950	400	238	1000	1225	721
10	300	210	300	438	1034	1101	340	535	900	320	347	964

3.3. Порядок розрахунку показників міжгалузевого балансу

Для виконання роботи необхідно відкрити новий файл Microsoft Excel, установити необхідні настройки листків та оформити таблиці для виконання подальших розрахунків згідно із прикладом в додатку 3.

Далі необхідно заповнити матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат та шляхом підсумовування елементів стовпців та рядків, за допомогою функції СУММ (категорія «Математичні»), перевірити матрицю на продуктивність (рис. 3.2). Зробити необхідні висновки.

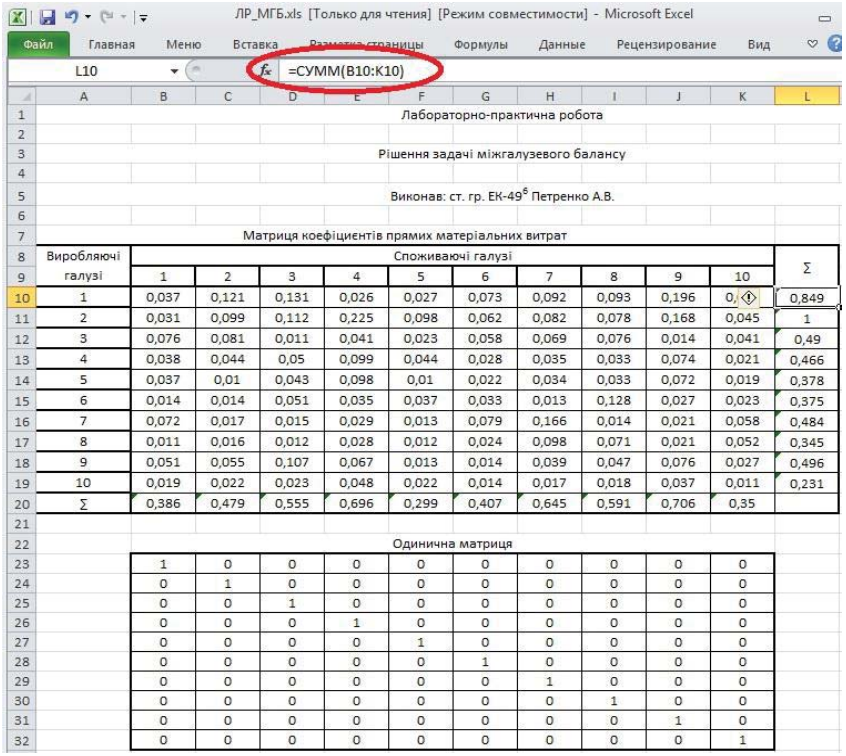
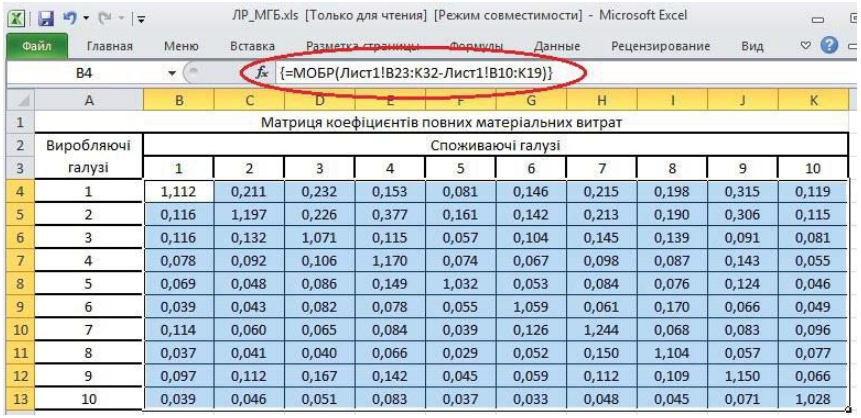


Рисунок 3.2 – Перевірка матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат на продуктивність та створення одиничної матриці

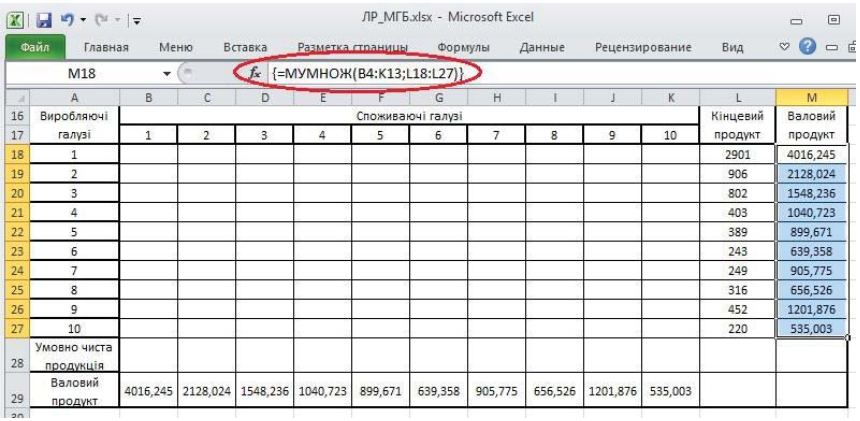
Для розрахунку матриці повних матеріальних витрат створимо одиничну матрицю потрібного розміру (рис. 3.2). На листку 2 розташуємо матрицю

коефіцієнтів повних матеріальних витрат (додаток 3), в якій виділимо необхідний діапазон комірок. За допомогою функції МОБР визначимо зворотну матрицю до матриці $(E - A)$ (рис. 3.3). Створимо таблицю МГБ та внесемо до неї вектор кінцевої продукції, відповідно до варіанта (табл. 3.4). Добутком матриці коефіцієнтів повних матеріальних витрат та вектора кінцевої продукції буде вектор-стовпчик валової продукції (рис. 3.4). За допомогою функції ТРАНСП заповнимо вектор-рядок валової продукції (рис. 3.4).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат										
2	Виробляючі	Споживаючі галузі									
3	галузі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	1,112	0,211	0,232	0,153	0,081	0,146	0,215	0,198	0,315	0,119
5	2	0,116	1,197	0,226	0,377	0,161	0,142	0,213	0,190	0,306	0,115
6	3	0,116	0,132	1,071	0,115	0,057	0,104	0,145	0,139	0,091	0,081
7	4	0,078	0,092	0,106	1,170	0,074	0,067	0,098	0,087	0,143	0,055
8	5	0,069	0,048	0,086	0,149	1,032	0,053	0,084	0,076	0,124	0,046
9	6	0,039	0,043	0,082	0,078	0,055	1,059	0,061	0,170	0,066	0,049
10	7	0,114	0,060	0,065	0,084	0,039	0,126	1,244	0,068	0,083	0,096
11	8	0,037	0,041	0,040	0,066	0,029	0,052	0,150	1,104	0,057	0,077
12	9	0,097	0,112	0,167	0,142	0,045	0,059	0,112	0,109	1,150	0,066
13	10	0,039	0,046	0,051	0,083	0,037	0,033	0,048	0,045	0,071	1,028

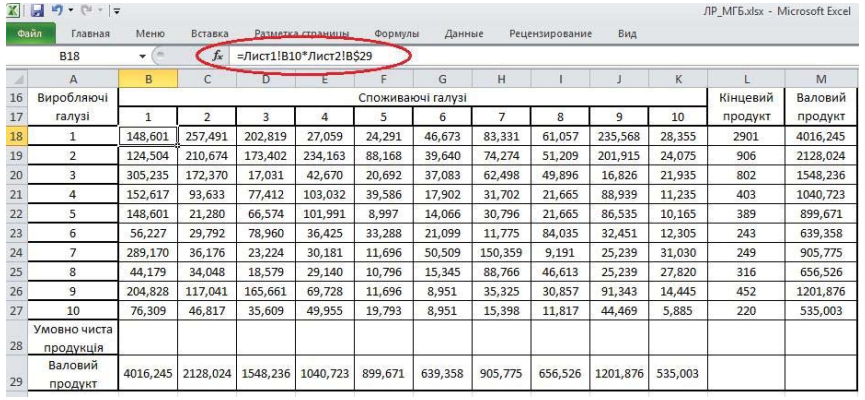
Рисунок 3.3 – Розрахунок матриці коефіцієнтів повних матеріальних витрат



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16	Виробляючі	Споживаючі галузі										Кінцевий	Валовий
17	галузі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	продукт	продукт
18	1											2901	4016,245
19	2											906	2128,024
20	3											802	1548,236
21	4											403	1040,723
22	5											389	899,671
23	6											243	639,358
24	7											249	905,775
25	8											316	656,526
26	9											452	1201,876
27	10											220	535,003
28	Умовно чиста продукція												
29	Валовий продукт	4016,245	2128,024	1548,236	1040,723	899,671	639,358	905,775	656,526	1201,876	535,003		

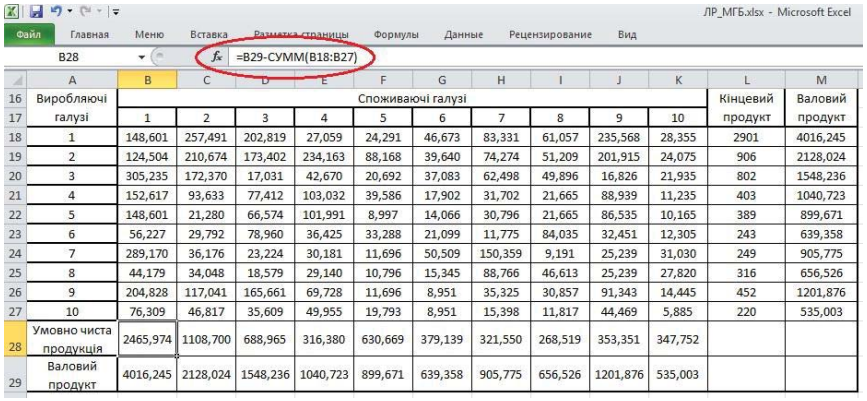
Рисунок 3.4 – Розрахунок вектора валової продукції

Шляхом використання відносних посилань на комірки матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат та змішаних посилань на комірки вектора-рядка валової продукції розрахуємо міжгалузеві постачання (рис. 3.5). Умовно чиста продукція розраховується за залишковим принципом, тобто від валової продукції споживаючої галузі віднімається сума міжгалузевих постачань цієї галузі (рис. 3.6).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16	Виробляючі	Споживаючі галузі										Кінцевий	Валовий
17	галузі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	продукт	продукт
18	1	148,601	257,491	202,819	27,059	24,291	46,673	83,331	61,057	235,568	28,355	2901	4016,245
19	2	124,504	210,674	173,402	234,163	88,168	39,640	74,274	51,209	201,915	24,075	906	2128,024
20	3	305,235	172,370	17,031	42,670	20,692	37,083	62,498	49,896	16,826	21,935	802	1548,236
21	4	152,617	93,633	77,412	103,032	39,586	17,902	31,702	21,665	88,939	11,235	403	1040,723
22	5	148,601	21,280	66,574	101,991	8,997	14,066	30,796	21,665	86,535	10,165	389	899,671
23	6	56,227	29,792	78,960	36,425	33,288	21,099	11,775	84,035	32,451	12,305	243	639,358
24	7	289,170	36,176	23,224	30,181	11,696	50,509	150,359	9,191	25,239	31,030	249	905,775
25	8	44,179	34,048	18,579	29,140	10,796	15,345	88,766	46,613	25,239	27,820	316	656,526
26	9	204,828	117,041	165,661	69,728	11,696	8,951	35,325	30,857	91,343	14,445	452	1201,876
27	10	76,309	46,817	35,609	49,955	19,793	8,951	15,398	11,817	44,469	5,885	220	535,003
28	Умовно чиста продукція												
29	Валовий продукт	4016,245	2128,024	1548,236	1040,723	899,671	639,358	905,775	656,526	1201,876	535,003		

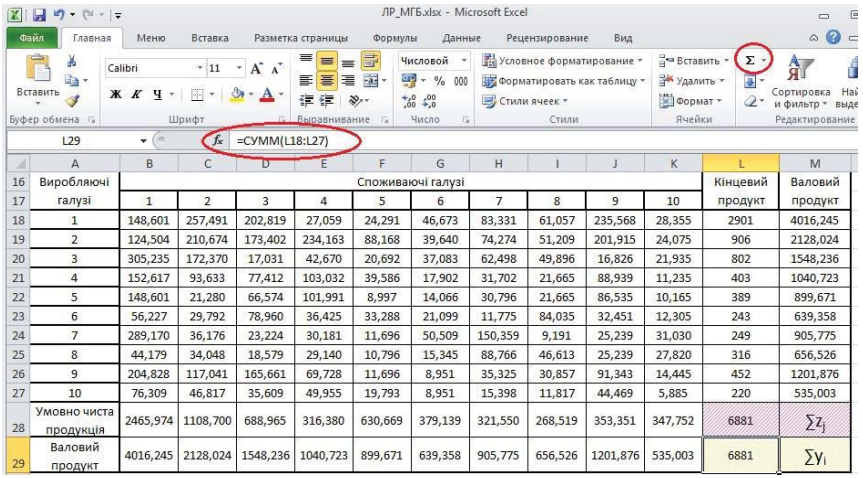
Рисунок 3.5 – Розрахунок міжгалузевих постачань



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16	Виробляючі	Споживаючі галузі										Кінцевий	Валовий
17	галузі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	продукт	продукт
18	1	148,601	257,491	202,819	27,059	24,291	46,673	83,331	61,057	235,568	28,355	2901	4016,245
19	2	124,504	210,674	173,402	234,163	88,168	39,640	74,274	51,209	201,915	24,075	906	2128,024
20	3	305,235	172,370	17,031	42,670	20,692	37,083	62,498	49,896	16,826	21,935	802	1548,236
21	4	152,617	93,633	77,412	103,032	39,586	17,902	31,702	21,665	88,939	11,235	403	1040,723
22	5	148,601	21,280	66,574	101,991	8,997	14,066	30,796	21,665	86,535	10,165	389	899,671
23	6	56,227	29,792	78,960	36,425	33,288	21,099	11,775	84,035	32,451	12,305	243	639,358
24	7	289,170	36,176	23,224	30,181	11,696	50,509	150,359	9,191	25,239	31,030	249	905,775
25	8	44,179	34,048	18,579	29,140	10,796	15,345	88,766	46,613	25,239	27,820	316	656,526
26	9	204,828	117,041	165,661	69,728	11,696	8,951	35,325	30,857	91,343	14,445	452	1201,876
27	10	76,309	46,817	35,609	49,955	19,793	8,951	15,398	11,817	44,469	5,885	220	535,003
28	Умовно чиста продукція	2465,974	1108,700	688,965	316,380	630,669	379,139	321,550	268,519	353,351	347,752		
29	Валовий продукт	4016,245	2128,024	1548,236	1040,723	899,671	639,358	905,775	656,526	1201,876	535,003		

Рисунок 3.6 – Розрахунок вектора умовно чистої продукції

Перевірка правильності розрахунку показників моделі МГБ здійснюється шляхом порівняння сум кінцевої та умовно чистої продукції (рис. 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16	Виробляючі галузі	Споживаючі галузі										Кінцевий продукт	Валовий продукт
17		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
18	1	148,601	257,491	202,819	27,059	24,291	46,673	83,331	61,057	235,568	28,355	2901	4016,245
19	2	124,504	210,674	173,402	234,163	88,168	39,640	74,274	51,209	201,915	24,075	906	2128,024
20	3	305,235	172,370	17,031	42,670	20,692	37,083	62,498	49,896	16,826	21,935	802	1548,236
21	4	152,617	93,633	77,412	103,032	39,586	17,902	31,702	21,665	88,939	11,235	403	1040,723
22	5	148,601	21,280	66,574	101,991	8,997	14,066	30,796	21,665	86,535	10,165	389	899,671
23	6	56,227	29,792	78,960	36,425	33,288	21,099	11,775	84,035	32,451	12,305	243	639,358
24	7	289,170	36,176	23,224	30,181	11,696	50,509	150,359	9,191	25,239	31,030	249	905,775
25	8	44,179	34,048	18,579	29,140	10,796	15,345	88,766	46,613	25,239	27,820	316	656,526
26	9	204,828	117,041	165,661	69,728	11,696	8,951	35,325	30,857	91,343	14,445	452	1201,876
27	10	76,309	46,817	35,609	49,955	19,793	8,951	15,398	11,817	44,469	5,885	220	535,003
28	Умовно чиста продукція	2465,974	1108,700	688,965	316,380	630,669	379,139	321,550	268,519	353,351	347,752	6881	$\sum z_j$
29	Валовий продукт	4016,245	2128,024	1548,236	1040,723	899,671	639,358	905,775	656,526	1201,876	535,003	6881	$\sum y_i$

Рисунок 3.7 – Перевірка збалансованості моделі МГБ

Як бачимо із рис. 3.7, для даної моделі сума кінцевої продукції дорівнює сумі умовно чистої продукції, що може свідчити про правильність розрахунків показників моделі МГБ. Після здійснення розрахунку показників МГБ необхідно зробити висновки та дати економічну інтерпретацію цим показникам. Результат виконання та оформлення лабораторно-практичної роботи наведений у додатку 3.

Список рекомендованої літератури

1. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика / В.В. Леонтьев. – М. : Политиздат, 1990. – 415 с.

2. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика; Пер. с англ. / В.В. Леонтьев – М. : Экономика, 1997. – 480 с.

3. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. – М. : Вузовский учебник, 2005. – 203 с.

4. Подчищаева О.В. Итерационные методы решения больших задач межотраслевого баланса / О.В. Подчищаева, Ю.Н. Пыхтеев // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. : Экономика и финансы. – 2004. – № 1. – С. 57-61.

Лабораторна робота 4
РІШЕННЯ ОДНОІНДЕКСНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, НА ПРИКЛАДІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗАКУПІВЕЛЬ

Мета роботи – набуття студентами практичних навичок рішення одноіндексних задач лінійного програмування (ЛП) графічним методом, засобами Mathcad та Microsoft Excel, на прикладі оптимізації закупівель. Аналіз отриманого оптимального рішення на чутливість за звітами надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel. Економічна інтерпретація отриманих результатів.

4.1. Постановка та формалізація задачі оптимізації закупівель

Задача. Підприємство може виготовляти п’ять різних видів продукції *A, B, C, D, E*. Для виготовлення кожного із видів продукції використовується одна і та ж сировина, що може закупатись у двох постачальників 1, 2. Із 1 т сировини постачальника 1 можна приготувати 0,3 т продукції *A*, 0,25 т продукції *B*, 0,05 т продукції *C*, 0,35 т продукції *D*, 0,05 т продукції *E*. Із 1 т сировини постачальника 2 можна приготувати 0,05 т продукції *A*, 0,2 т продукції *B*, 0,4 т продукції *C*, 0,1 т продукції *D*, 0,25 т продукції *E*. На ринку за квартал може бути реалізовано не більше 2,1 т продукції *A*, 2,8 т – продукції *B*, 4,6 т – продукції *C*, 2,6 т – продукції *D*, 4 т – продукції *E*. Відносний прибуток, що дає одна тонна сировини постачальника 1 складає 6,3 тис. грн., а постачальника 2 – 7,2 тис. грн Необхідно скласти оптимальний за прибутком план закупівель сировини у двох постачальників на квартал.

Для зручності подальшої формалізації оптимізаційної задачі вихідні дані зведемо до табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,3	0,25	0,05	0,35	0,05	6,3
2	0,05	0,2	0,4	0,1	0,25	7,2
Максимальні обсяги реалізації	2,1	2,8	4,6	2,6	4	

Для виконання лабораторної роботи студенти обирають таблиці із вихідними даними задачі за своїм варіантом, що відповідає номеру комп'ютера, де виконується робота (пункт 4.6).

Розв'язання задачі ЛП може бути здійснене за таким алгоритмом:

1. Визначення економічного змісту та кількості керованих змінних (КЗ). Перед нами стоїть задача скласти оптимальний за прибутком план закупівель сировини у двох постачальників. Оскільки постачальників у нас два, маємо дві КЗ – x_1та x_2, економічним сенсом яких буде обсяг закупівель на квартал у першого та другого постачальників відповідно.

2. Формалізація критерію оптимальності у вигляді цільової функції (ЦФ). Оскільки необхідно знайти оптимальний за прибутком план закупівель – критерієм оптимальності буде прибуток підприємства. Відносний прибуток, що дає одна тонна сировини постачальника 1 складає 6,3 тис. грн, а постачальника 2 – 7,2 тис. грн. Тоді прибуток, що дає вся сировина постачальника 1 складає $(6{,}3\cdot x_1)$ тис. грн, а постачальника 2 $-(7{,}2\cdot x_2)$ тис. грн. ЦФ буде являти собою суму прибутків від закупівель сировини у першого та другого постачальників, причому прибуток максимізується:

$$f(x_1, x_2) = 6{,}3\cdot x_1 + 7{,}2\cdot x_2 \to \max. \qquad (4.1)$$

3. Формалізація обмежень. У нашому випадку область допустимих значень КЗ буде визначатися максимально можливими обсягами реалізації продукції *A, B, C, D, E* підприємства на ринку. У лівій частині обмеження буде знаходитися кількість виробленої продукції певного виду у відповідності із оптимальними закупівлями сировини у постачальників. Так із сировини x_1, придбаної у 1-го постачальника, підприємство виготовить $(0{,}3\cdot x_1)$ т продукції *A*, із сировини x_2, придбаної у 2-го постачальника, – $(0{,}05\cdot x_2)$ т. У правій частині обмеження буде максимально можлива кількість реалізації продукції *A* на ринку:

$$0{,}3\cdot x_1 + 0{,}05\cdot x_2 \le 2{,}1. \qquad (4.2)$$

Аналогічним чином формалізуємо обмеження з продукції *B, C, D, E*:

$$0{,}25\cdot x_1 + 0{,}2\cdot x_2 \le 2{,}8; \qquad (4.3)$$

$$0{,}05\cdot x_1 + 0{,}4\cdot x_2 \le 4{,}6; \qquad (4.4)$$

$$0{,}35\cdot x_1 + 0{,}1\cdot x_2 \le 2{,}6; \qquad (4.5)$$

$$0{,}05\cdot x_1 + 0{,}25\cdot x_2 \le 4. \qquad (4.6)$$

Окрім того, необхідно зауважити, що обсяги закупівель не можуть набувати від'ємні значення, тобто:

$$x_1 \ge 0; \qquad x_2 \ge 0. \qquad (4.7)$$

Внаслідок формалізації ЦФ та обмежень можемо записати оптимізаційну модель задачі оптимізації з прибутку закупівель сировини у двох постачальників на квартал:

$$f(x_1, x_2) = 6{,}3\cdot x_1 + 7{,}2\cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 0{,}3\cdot x_1 + 0{,}05\cdot x_2 \le 2{,}1; \\ 0{,}25\cdot x_1 + 0{,}2\cdot x_2 \le 2{,}8; \\ 0{,}05\cdot x_1 + 0{,}4\cdot x_2 \le 4{,}6; \\ 0{,}35\cdot x_1 + 0{,}1\cdot x_2 \le 2{,}6; \\ 0{,}05\cdot x_1 + 0{,}25\cdot x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Оптимізаційна модель містить лінійну ЦФ та виключно лінійні обмеження, тобто це задача ЛП. Перейдемо до розв'язання задачі.

4.2. Розв'язання задачі оптимізації закупівель графічним методом

Графічний метод може бути застосований лише для оптимізаційних задач із кількістю КЗ не більше двох. Розв'язання задач із кількістю КЗ більше двох вкрай ускладнене і може забезпечити знаходження не оптимального, а певного субоптимального рішення за двома КЗ. На сьогоднішній час графічний метод рішення оптимізаційних задач втратив свою актуальність через широке розповсюдження комп'ютерної техніки. Тим не менш, він дозволяє зрозуміти основні поняття і принципи ЛП та лежить в основі більш складних аналітичних методів розв'язання цих задач, наприклад симплекс-методу. Тому вивчення

методів рішення оптимізаційних задач ЛП доцільно розпочинати саме з нього. Оскільки дана оптимізаційна задача містить лише дві КЗ, вона може бути вирішена графічним методом.

Для цього в координатах x_1 та x_2 накреслимо прямі (рис. 4.1), що задаються рівняннями, які відповідають обмеженням за максимально можливими обсягами реалізації продукції *A, B, C, D, E*:

$$\begin{cases} 0{,}3\cdot x_1 + 0{,}05\cdot x_2 = 2{,}1; \\ 0{,}25\cdot x_1 + 0{,}2\cdot x_2 = 2{,}8; \\ 0{,}05\cdot x_1 + 0{,}4\cdot x_2 = 4{,}6; \\ 0{,}35\cdot x_1 + 0{,}1\cdot x_2 = 2{,}6; \\ 0{,}05\cdot x_1 + 0{,}25\cdot x_2 = 4. \end{cases} \tag{4.9}$$

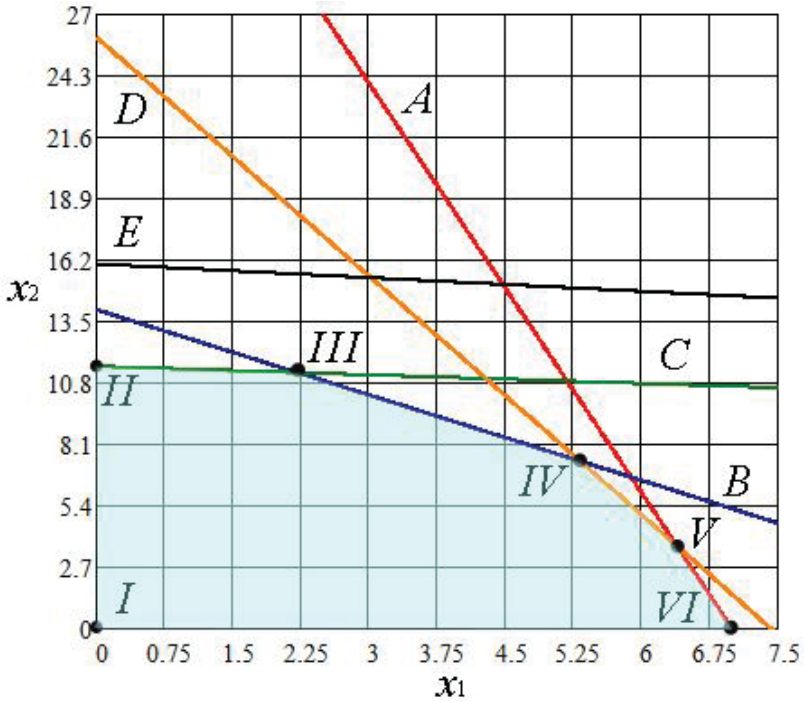


Рисунок 4.1 – Обмеження та область допустимих значень КЗ

Отримані прямі будуть окреслювати напів площини, що відповідають обмеженням (4.2) – (4.6), причому напівплощини включають самі лінії, оскільки в нерівностях використані знаки «≤». Також потрібно зважати на те, що обмеження невід'ємності КЗ (4.7) графічно відображені у вигляді осей координат: $x_1 \geq 0$ – вісь абсцис; $x_2 \geq 0$ – вісь ординат.

У результаті отримаємо багатокутник (рис. 4.1), який обмежує область допустимих значень КЗ нашої оптимізаційної задачі. Причому багатокутник включає лінії (4.9) та вісі координат, оскільки всі нерівності у нас не суворі. КЗ можуть приймати будь-які значення із області допустимих значень, однак екстремальне значення ЦФ буде досягатися в одній із вершин багатокутника. Позначимо вершини багатокутника римськими цифрами I, II, III, IV, V, VI та графічно знайдемо координати цих точок. Очевидно, в точці I буде досягатись мінімум ЦФ. Для інших вершин багатокутника визначимо значення ЦФ, шляхом підстановки в неї значень координат точок II, III, IV, V, VI:

$$f_{II}(0;\quad 11{,}57) = 6{,}3\cdot 0 + 7{,}2\cdot 11{,}57 = 83{,}3; \tag{4.10}$$

$$f_{III}(2{,}22;\quad 11{,}22) = 6{,}3\cdot 2{,}2 + 7{,}2\cdot 11{,}2 = 94{,}77; \tag{4.11}$$

$$f_{IV}(5{,}3;\quad 7{,}5) = 6{,}3\cdot 5{,}3 + 7{,}2\cdot 7{,}5 = 87{,}39; \tag{4.12}$$

$$f_{V}(6{,}4;\quad 3{,}65) = 6{,}3\cdot 6{,}4 + 7{,}2\cdot 3{,}65 = 66{,}5; \tag{4.13}$$

$$f_{VI}(7;\quad 0) = 6{,}3\cdot 7 + 7{,}2\cdot 0 = 44{,}1. \tag{4.14}$$

Як бачимо, максимальне значення ЦФ досягається у точці III із координатами (2,22; 11,22). Отже, оптимальні за прибутком квартальні закупівлі сировини у 1-го постачальника будуть складати $x_1 = 2{,}22$ т, а у другого – $x_2 = 11{,}22$ т. При таких обсягах закупівель сировини прибуток буде максимальним для заданих обмежень, та складатиме 75,7 тис. грн. на квартал.

Точка III безпосередньо визначається обмеженнями за максимальною реалізацією продукції *B* та *C*, отже, обмеження (4.3) та (4.4) будуть

зв'язуючими. Економічний сенс зв'язаності обмежень буде тут полягати в повному використанні потенціалу з реалізації продукції *B* та *C* підприємством:

$$0{,}25 \cdot 2{,}22 + 0{,}2 \cdot 11{,}22 = 2{,}8; \qquad (4.15)$$

$$0{,}05 \cdot 2{,}22 + 0{,}4 \cdot 11{,}22 = 4{,}6. \qquad (4.16)$$

Для подальшого збільшення значення ЦФ, тобто прибутку підприємства, доцільно збільшувати маркетинговими засобами попит на продукцію *B* та *C* аж поки обмеження за іншими видами продукції не стануть зв'язуючими.

Інші обмеження будуть *незв'язуючими*, оскільки прямі, що їм відповідають, безпосередньо не визначають точку оптимуму. Економічним сенсом незв'язаності обмеження в умовах нашої задачі буде частково невикористаний потенціал ринку з реалізації продукції *A, D, E*.

Розглянемо це на прикладі продукції виду *A*. Ліва частина обмеження (4.2) показує кількість виробленої продукції при реалізації оптимальної програми закупівель сировини:

$$0{,}3 \cdot 2{,}22 + 0{,}05 \cdot 11{,}22 = 1{,}23. \qquad (4.17)$$

У той же час права частина обмеження (ПЧО) показує максимальні можливості з реалізації продукції та становить 2,1 т. Отже, невикористаний потенціал ринку з реалізації продукції *A* становить 0,87 т. Аналогічні розрахунки можна провести і за іншими видами продукції.

Незв'язуюче обмеження (4.6) з максимальної реалізації продукції *E* буде називатися *надлишковим*, оскільки воно безпосередньо не визначає області допустимих значень КЗ.

Для повноти розв'язання задачі ЛП графічним методом зобразимо графік ЦФ, що проходить через точку III оптимального розв'язання (рис. 4.2).

Визначати розташування лінії ЦФ на площині буде додаткова точка, координати якої знайдемо за формулою:

$$6{,}3 \cdot x_1 + 7{,}2 \cdot x_2 = 94{,}8. \qquad (4.18)$$

Наприклад, це може бути точка із координатами (0;13,17) (рис. 4.2).

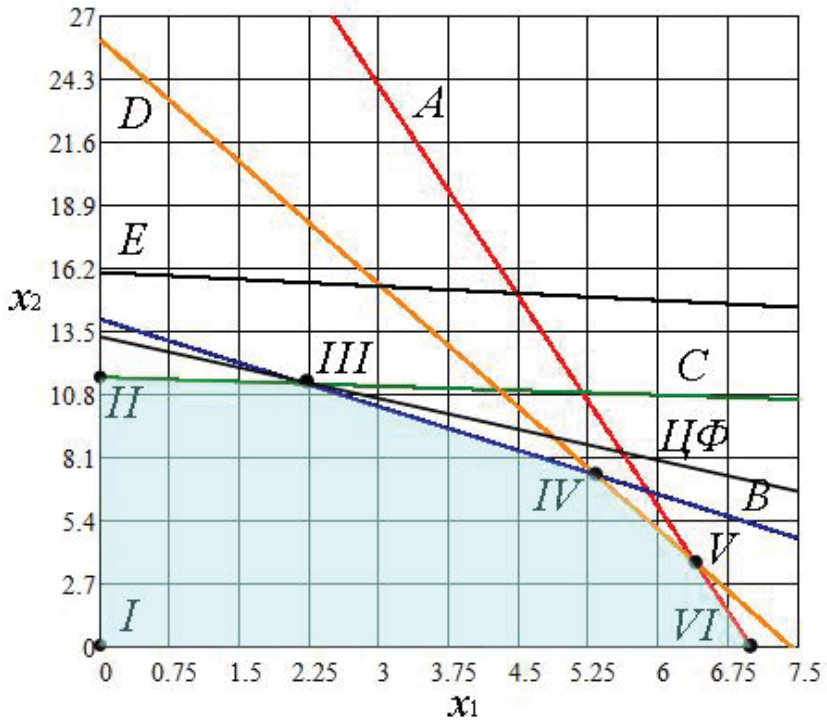


Рисунок 4.2 – Результат розв'язання задачі ЛП графічним методом

У результаті проведеної роботи графічним методом знайдено оптимальний за прибутком план закупівель сировини підприємством у двох постачальників. Однак коло оптимізаційних задач, що може бути вирішено графічним методом, обмежене задачами із кількістю КЗ не більше двох. Також в наш час графічний метод утратив свою актуальність через наявність значної кількості комп'ютерних програм для розв'язання оптимізаційних задач.

4.3. Розв'язання одноіндексних задач математичного програмування засобами Mathcad на прикладі оптимізації закупівель

Як відомо із теоретичної частини курсу, задачі МП зводяться до пошуку екстремуму ЦФ. У Mathcad для розв'язання задач пошуку максимуму чи мінімуму функцій є такі оператори:

1. *Maximize*$(f, x_1,...,x_n)$ – повертає вектор значень КЗ $x_1,...,x_n$, при яких функція f досягає максимуму;

2. *Minimize*$(f, x_1,...,x_n)$ – повертає вектор значень КЗ $x_1,...,x_n$, при яких функція f досягає мінімуму.

Maximize та *Minimize* реалізують чисельні методи пошуку екстремуму функції, тому після запису ЦФ f КЗ потрібно присвоїти початкові значення, із яких почнеться перша ітерація обчислень. У задачах ЛП початкові значення КЗ не є принциповими, головним тут є просто їх наявність. Однак у задачах НП значення КЗ, із яких почнеться перша ітерація, носять принциповий характер, що буде розглянуто у відповідній темі курсу.

Указані оператори можуть застосовуватися, як для безумовної оптимізації, так і для оптимізації при наявності обмежень. У задачах умовної оптимізації функції *Maximize* та *Minimize* мають бути включені в обчислювальний блок, тобто їм має передувати ключове слово *Given*. Між ним та функцією пошуку екстремуму за допомогою бульових операторів записують обмеження. Порядок розв'язання одноіндексної задачі ЛП у Mathcad показаний на рис. 4.3 на прикладі задачі оптимізації закупівель. Послідовність розв'язання одноіндексних задач НП у Mathcad та ж сама, але тут потрібно пам'ятати про принциповість вибору початкових значень КЗ. Також у Mathcad можна змінити метод розв'язання задачі, який за умовчанням обирається автоматично (рис. 4.4).

Для задач НП метод розв'язання може носити принциповий характер. Наприклад, якщо задача не вирішується одним методом, доцільно спробувати інший. Також від вибору методу розв'язання задачі НП може залежати результат. Лінійні задачі можуть бути вирішені нелінійними методами, однак використання спеціальних методів ЛП скорочує обчислювальний час розрахунків, що може бути важливо в складних задачах ЛП із великою кількістю КЗ та обмежень.

Як видно із рис. 4.3, послідовність розв'язання одноіндексної задачі ЛП у Mathcad значною мірою схожа на звичайний запис оптимізаційної моделі на папері. Структура розв'язання одноіндексних задач НП подібна до розглянутої. Особливості розв'язання задач НП у Mathcad розглянуто в межах даного пункту.

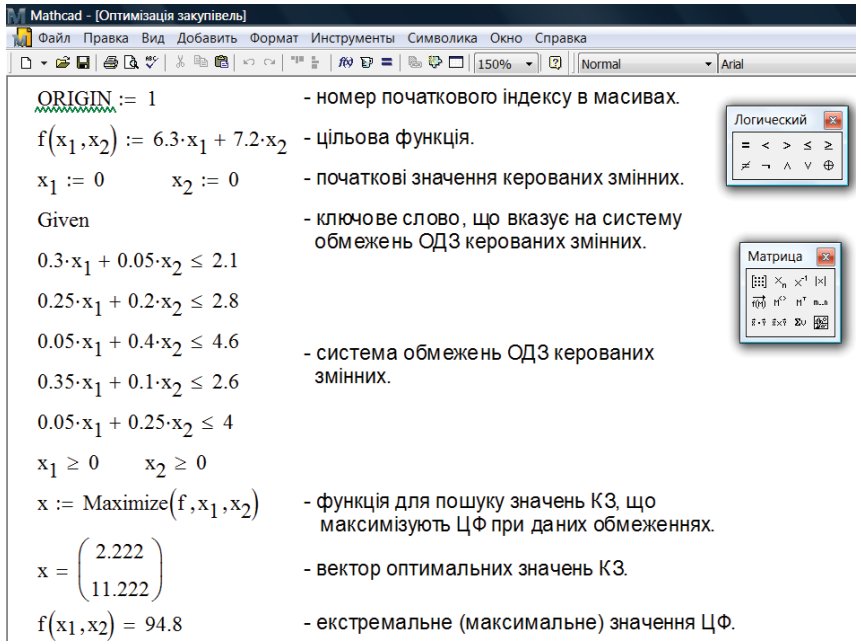


Рисунок 4.3 – Послідовність розв'язання одноіндексних задач ЛП у Mathcad

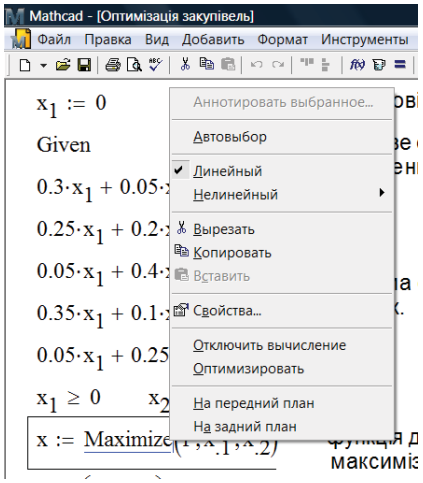


Рисунок 4.4 – Діалогове вікно для обрання методу пошуку екстремуму функції

Незважаючи на простоту та наочність розв’язання оптимізаційних задач у Mathcad, ця програма не надає додаткової інформації для аналізу чутливості отриманого розв’язання. Аналіз чутливості отриманого оптимального розв’язання вкрай важливий у задачах економічного характеру через мінливість та стохастичність соціально-економічних процесів. Тому далі розглянемо надбудову «Пошук розв’язку» Microsoft Excel, яка може забезпечити не тільки знаходження оптимального розв’язання, але і виконати аналіз його чутливості.

4.4. Розв’язання одноіндексних задач ЛП за допомогою надбудови «Пошук розв’язку» Microsoft Excel

Перш за все, складемо таблицю параметрів оптимізаційної моделі в Microsoft Excel (рис. 4.5). Під параметрами розуміються цільові коефіцієнти, коефіцієнти при КЗ у обмеженнях, праві частини обмежень.

	A	B	C	D	E	F
1	Лабораторно-практична робота № 4					
2	Рішення одноіндексної задачі лінійного програмування, на прикладі оптимізації закупівель					
3	Виконала ст. гр. ЕК-50[a] Іваненко А.П.					
4						
5	Обмеження	Керовані змінні		Права частина обмеження		
6		x_1	x_2			
7	Max реалізація пр-ції A	0,3	0,05	2,1		
8	Max реалізація пр-ції B	0,25	0,2	2,8		
9	Max реалізація пр-ції C	0,05	0,4	4,6		
10	Max реалізація пр-ції D	0,35	0,1	2,6		
11	Max реалізація пр-ції E	0,05	0,25	4		
12	Цільова функція	6,3	7,2	max		

Рисунок 4.5 – Таблиця параметрів оптимізаційної моделі в Microsoft Excel

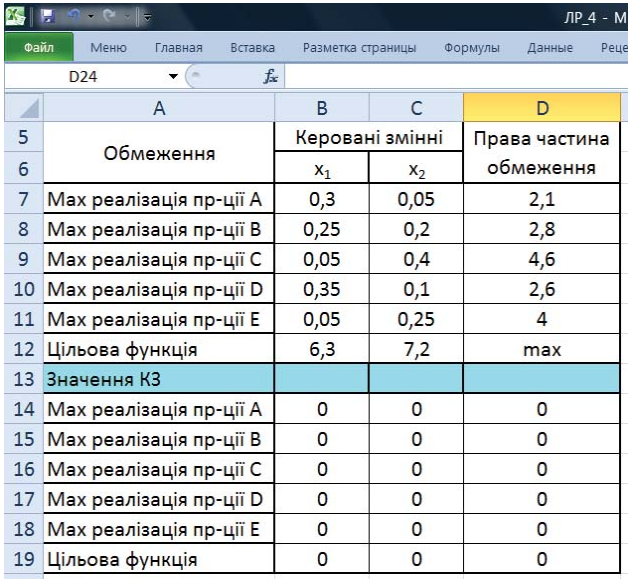
Другим етапом буде створення розрахункової таблиці (рис. 4.6). Для цього додамо рядок із назвою «Значення КЗ» до таблиці (рис. 4.5). Потім скопіюємо рядки з 7 по 12 включно, таблиці параметрів оптимізаційної моделі. Звільнимо створені рядки від числових даних. Далі у комірці **B14** помножимо комірку **B13**, що відповідає змінній x_1 на комірку **B7**, тобто на відповідний їй коефіцієнт в обмеженні на максимальну реалізацію продукції *A*, причому комірка **B7** записується як відносна , а **B13** як змішана із зафіксованим рядком:

=B$13*B7. (4.19)

Далі формулу (4.19) копіюємо шляхом «протягування» у діапазон комірок **B14**:**C19**. У комірці **D14** підсумовуємо відповідний рядок:

=СУММ(B14: C14). (4.20)

Потім формулу (4.20) копіюємо для діапазону комірок від **D14** до **D19**. Закінчити введення формул необхідно виділенням комірки **D19**, що відповідає результуючому значенню ЦФ. У результаті зазначеної вище послідовності дій, ми отримали розрахункову таблицю (рис. 4.6), що придатна для використання надбудови «Пошук розв’язку» Microsoft Excel.



	A	B	C	D
5	Обмеження	Керовані змінні		Права частина обмеження
6		x_1	x_2	
7	Max реалізація пр-ції A	0,3	0,05	2,1
8	Max реалізація пр-ції B	0,25	0,2	2,8
9	Max реалізація пр-ції C	0,05	0,4	4,6
10	Max реалізація пр-ції D	0,35	0,1	2,6
11	Max реалізація пр-ції E	0,05	0,25	4
12	Цільова функція	6,3	7,2	max
13	Значення КЗ			
14	Max реалізація пр-ції A	0	0	0
15	Max реалізація пр-ції B	0	0	0
16	Max реалізація пр-ції C	0	0	0
17	Max реалізація пр-ції D	0	0	0
18	Max реалізація пр-ції E	0	0	0
19	Цільова функція	0	0	0

Рисунок 4.6 – Розрахункова таблиця

При виділеній комірці **D19**, в якій буде визначено максимальне значення ЦФ, необхідно активізувати надбудову «Пошук розв’язку». Для цього в Microsoft Excel 2010 необхідно відкрити стрічку «Дані» та обрати «Пошук розв’язку» (рис. 4.7). При першому використанні надбудови необхідно винести «Пошук розв’язку» на стрічку «Дані». Робота надбудови «Пошук розв’язку» починається із відкриття відповідного діалогового вікна (рис. 4.7).

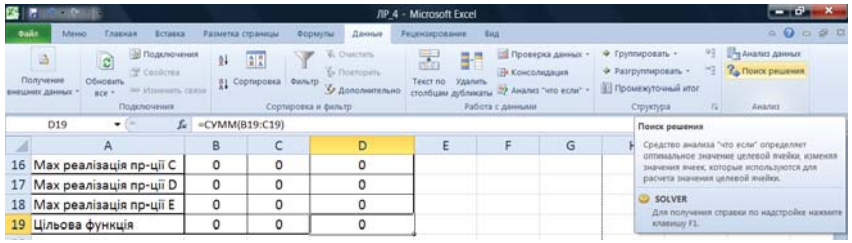


Рисунок 4.7 – Активізація надбудови «Пошук розв'язку» в Microsoft Excel

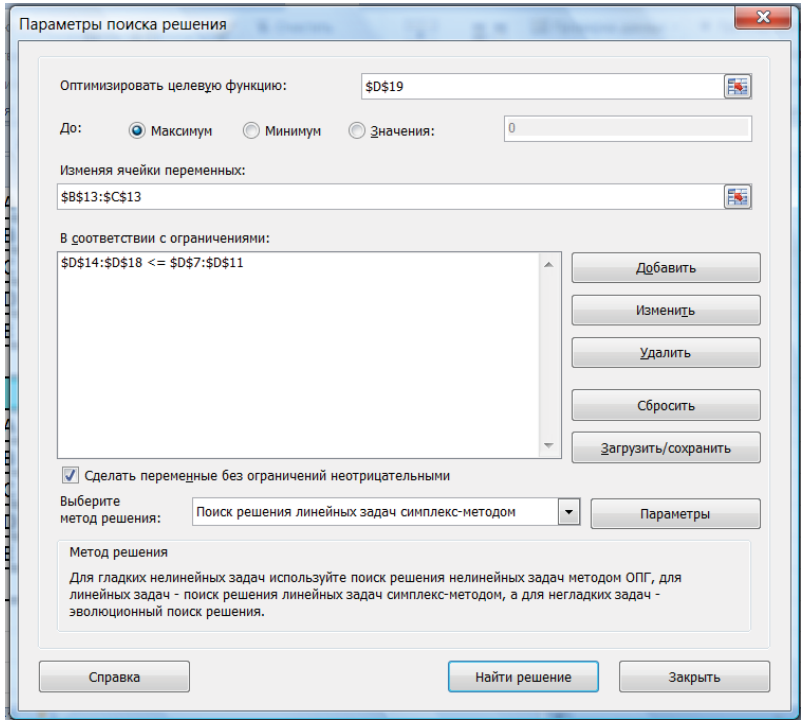


Рисунок 4.8 – Діалогове вікно надбудови «Пошук розв'язку»

У полі «Оптимізувати ЦФ» за умовчанням указана комірка **$D$19** тому, що вона була виділена під час запуску надбудови «Пошук рішення». В іншому разі комірку, в якій буде записане оптимальне значення ЦФ необхідно вказати вручну. В умовах нашої задачі напрямок оптимізації – максимізація, що має бути відображена в діалоговому вікні. У вікні «Змінюючи комірки змінних»

необхідно відмітити комірки, які відповідають КЗ: **$B$13:$C$13**. Для додавання обмежень у вікно «Відповідно із обмеженнями» необхідно натиснути на кнопку «Додати». У діалоговому вікні, яке з'явилося, необхідно ввести обмеження та натиснути на кнопку «Додати» (рис. 4.9). Для нашої задачі необхідно обрати метод розв'язання – «Пошук розв'язання лінійних задач симплекс-методом» (рис. 4.8). Після заповнення усіх необхідних вікон в діалоговому вікні надбудови «Пошук рішення» натискають «Знайти рішення» (рис. 4.8). Якщо оптимальне розв'язання знайдене – з'явиться діалогове вікно (рис. 4.10), в якому необхідно виділити типи звітів: результати, стійкість, межі, після чого натиснути ОК. У таблиці (рис. 4.6) з'являться результати розрахунків (див. додаток 4), а також додадуться звіти на окремих листах (див. додаток 4).

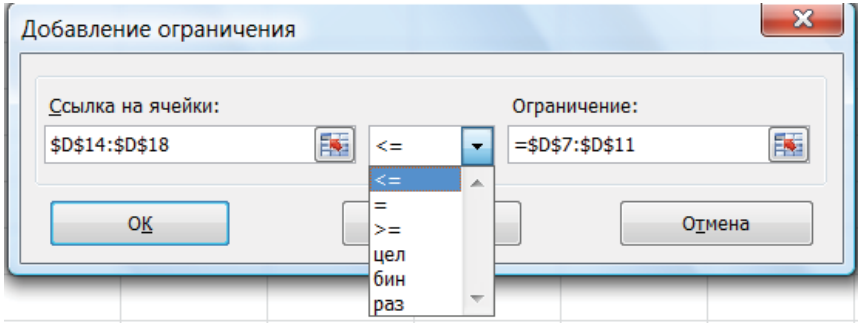


Рисунок 4.9 – Діалогове вікно «Додавання обмеження»

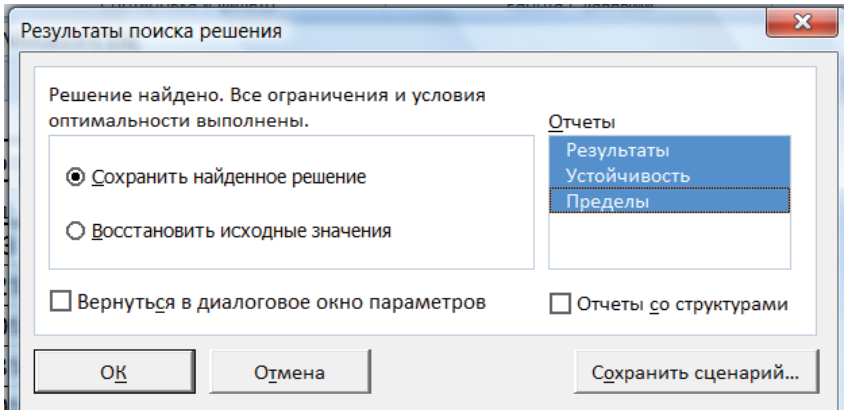


Рисунок 4.10 – Діалогове вікно «Результати пошуку розв'язання»

4.5. Запитання для висновків за результатами розв'язання задачі оптимізації закупівель та приклади відповідей

Опираючись на лекційну частину курсу і звіти за результатами, стійкості, меж необхідно надати економічну інтерпретацію отриманому розв'язанню та проаналізувати його чутливість. Для цього потрібно відповісти на запитання:

1. Які обсяги закупівель сировини у кожного із постачальників забезпечують максимальний прибуток за квартал при заданих обмеженнях?

При заданих обмеженнях максимальний квартальний прибуток підприємству (94,8 тис. грн) забезпечать закупівлі сировини у першого постачальника в обсязі 2,222 т, а у другого – 11,222 т.

2. Які обмеження визначають максимальний прибуток підприємства?

Максимальний прибуток підприємству забезпечують обмеження за максимальною реалізацією продукції *B* та *C*.

3. Вказати кількість продукції кожного виду, яка буде забезпечувати максимальний прибуток підприємству?

Максимальний прибуток підприємству буде забезпечувати виготовлення продукції в обсягах: *A* – 1,288 т, *B* – 2,8 т, *C* – 4,6 т, *D* – 1,9 т, *E* – 2,917 т.

4. Визначити попит на яку із видів продукції доцільно маркетинговими засобами намагатися збільшити в першу чергу при інших рівних умовах?

Перш за все, доцільно збільшувати попит на продукцію *B*, що дасть найбільший приріст прибутку підприємства.

5. Вказати, у кого із постачальників закупівлі є збитковими, якщо такий був визначений при рішенні задачі.

В умовах даної задачі закупівлі сировини в обох постачальників увійшли в дане оптимізаційне розв'язання, тобто вони є прибутковими.

6. Вказати межі, в яких можуть змінюватися ПЧО так, щоб при незмінних інших числових характеристиках оптимізаційної моделі максимальне значення ЦФ залишалося незмінним.

При всіх інших незмінних числових характеристиках оптимізаційної моделі максимальне значення ЦФ залишиться незмінним, якщо ПЧО не вийдуть за такі межі:

$$1{,}228 \le b_A \le \infty; \quad 2{,}3 \le b_B \le 3{,}267; \quad 3{,}2 \le b_C \le 5{,}6; \quad 1{,}9 \le b_D \le \infty; \quad 2{,}917 \le b_E \le \infty.$$

7. Указати межі, в яких можуть змінюватися цільові коефіцієнти так, щоб при незмінних інших числових характеристиках оптимізаційної моделі максимальне значення ЦФ залишалося незмінним.

При всіх інших незмінних числових характеристиках оптимізаційної моделі максимальне значення ЦФ залишиться незмінним, якщо цільові коефіцієнти не вийдуть за такі межі: $0{,}9 \le c_1 \le 9$; $5{,}04 \le c_2 \le 50{,}4$.

Запитання позначені курсивом, а приклади відповідей на них наведені під ними. Приклад виконання лабораторної роботи наведено в додатку 4.

4.6. Варіанти для виконання лабораторної роботи

Умови оптимізаційної задачі однакові для всіх варіантів, змінюються лише числові характеристики моделі. Номер варіанта співпадає із номером комп'ютера, за яким студент виконує лабораторну роботу. Відповідність між варіантами та номерами таблиць така: табл. 4.2 – 1-й варіант, табл. 4.3 – 2-й варіант, табл.4.3 – 3-й варіант и т.п.

Таблиця 4.2 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,15	0,2	0,15	0,3	0,1	7,2
2	0,2	0,15	0,1	0,15	0,3	4,5
max обсяги реалізації	1,4	2	1,5	1,8	2	

Таблиця 4.3 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,1	0,2	0,15	0,3	0,1	6
2	0,2	0,15	0,2	0,15	0,25	4,5
max обсяги реалізації	1,4	2	1,5	1,8	2,2	

Таблиця 4.4 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,05	0,2	0,15	0,3	0,3	5,5
2	0,3	0,25	0,3	0,1	0,05	6
max обсяги реалізації	3,5	4	6	1,4	1,2	

Таблиця 4.5 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,2	0,2	0,15	0,3	0,1	10,1
2	0,25	0,15	0,2	0,1	0.25	8
max обсяги реалізації	2	1,3	2,2	1,7	2,5	

Таблиця 4.6 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	12,3
2	0,2	0,15	0,1	0,15	0,3	4,5
max обсяги реалізації	4	2,5	1	1,75	2,8	

Таблиця 4.7 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,15	0,2	0,15	0,3	0,05	2,1
2	0,2	0,3	0,05	0,05	0,2	5,3
max обсяги реалізації	3,2	7	0,9	1,4	4	

Таблиця 4.8 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,05	0,2	0,15	0,3	0,1	2,1
2	0,2	0,3	0,05	0,05	0,2	5,3
max обсяги реалізації	3,2	7	0,9	1,4	4	

Таблиця 4.9 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,25	0,2	0,15	0,2	0,15	10,1
2	0,3	0,15	0,2	0,1	0,2	8
max обсяги реалізації	2,4	1,3	2	1,2	2,4	

Таблиця 4.10 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,25	0,35	0,1	0,2	0,1	7,5
2	0,15	0,1	0,3	0,15	0,3	4,5
max обсяги реалізації	3	2,3	3	1,8	5	

Таблиця 4.11 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,2	0,2	0,15	0,2	0,1	8,2
2	0,2	0,05	0,25	0,1	0,25	9,6
max обсяги реалізації	3,3	1,5	6	1,8	5	

Таблиця 4.12 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,05	0,3	0,15	0,3	0,1	7,6
2	0,2	0,35	0,1	0,05	0,2	8,3
max обсяги реалізації	4	9	2,2	2,5	6	

Таблиця 4.13 – Вихідні дані задачі оптимізації закупівель

Постачальники	Види продукції					Відносний прибуток
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	0,25	0,2	0,2	0,2	0,15	12,2
2	0,3	0,15	0,05	0,2	0,3	12,8
max обсяги реалізації	6	2,4	1,5	5	4,4	

Список рекомендованої літератури

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг; пер. с англ. – М. : Физматгиз, 1961. – 310 с.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.
3. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
4. Алесинская Т.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование : учеб.-метод. Пособ. / Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.
5. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.
6. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб., за ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
7. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 560 с.

Лабораторна робота 5
РІШЕННЯ КЛАСИЧНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL

Мета роботи – розв'язання незбалансованої класичної транспортної задачі (ТЗ) за допомогою надбудови «Пошук розв'язку» Microsoft Excel. Моделювання ситуації неможливості перевезень в окремому напрямку. Аналіз чутливості оптимального розв'язку за звітами надбудови «Пошук розв'язку».

5.1. Перевірка збалансованості ТЗ та приведення її до збалансованого вигляду. Створення транспортної матриці в Microsoft Excel

Задача. Підприємство має чотири виробничі бази в Харкові, Полтаві, Донецьку та Одесі. Кількість виробленої продукції на тиждень складає: у Харкові – 120 т, у Полтаві – 120 т, у Донецьку – 80 т, в Одесі – 105 т. Оптові центри продажів даного підприємства знаходяться в Кременчуці, Сімферополі, Луганську, Києві, Львові та Ужгороді. Потреби в продукції на тиждень складають для оптового центру продажів в Кременчуці – 40 т, Сімферополі – 60 т, Луганську – 100 т, Києві – 125 т, Львові – 60 т, Ужгороді – 50 т. Вартості перевезень із пунктів відправлення (виробничі бази) у пункти призначення (оптові центри продажів) подані у табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Вартості перевезень 1 т продукції, у.о.

Виробничі бази	Оптові центри продажів					
	Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород
Харків	19,58	44,78	26,77	34,14	61,88	67,5
Полтава	9,01	53,14	31,07	24,8	57,97	64,69
Донецьк	37,6	43,61	11,62	51,18	66,59	71,29
Одеса	34,14	37,6	60,91	44,78	48,57	60,91

Відомо, що перевезення із Донецька в Луганськ неможливі через форс-мажорні обставини. У даній задачі припускається, що вартості перевезень прямо пропорційні обсягам перевезень. Необхідно скласти такий план перевезень, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними.

Умова збалансованості ТЗ полягає у рівності сумарних запасів у всіх пунктах відправлення та сумарних потреб в усіх пунктах призначення. В умовах нашої задачі:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \qquad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 120 + 120 + 80 + 105 = 425\,\text{т};$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6; \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 40 + 60 + 100 + 125 + 60 + 50 = 435\,\text{т}.$$

У Microsoft Excel визначення сумарних запасів та сумарних потреб виглядає таким чином (рис. 5.1).

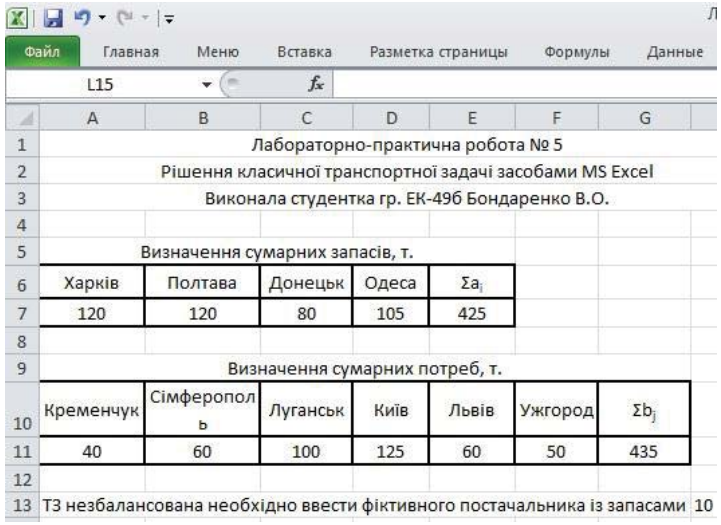
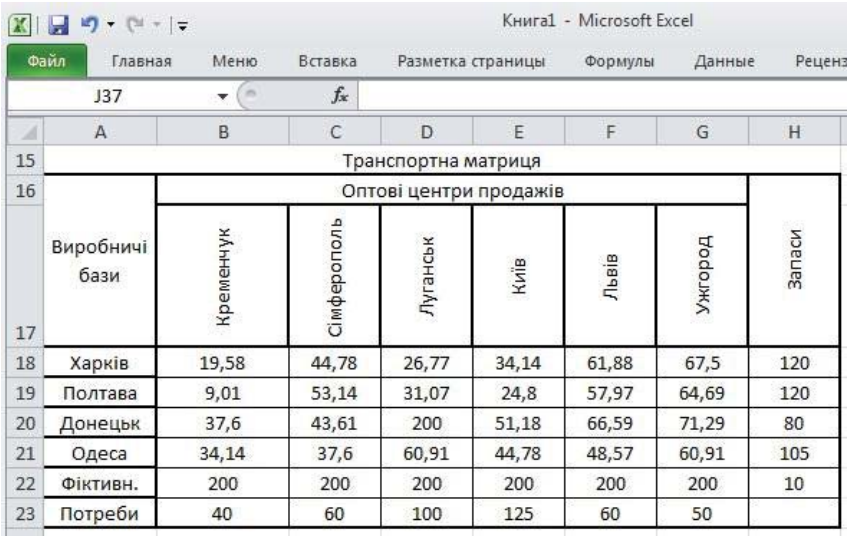


Рисунок 5.1 – Перевірка збалансованості ТЗ

Дана ТЗ незбалансована, причому сумарні потреби перевищують сумарні запаси. Для розв'язання задачі введемо фіктивний пункт відправлення, тобто фіктивну виробничу базу із уявними обсягами виробництва в розмірі $\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = 10\,\text{т}$ та фіктивними тарифами на перевезення. Створимо

транспортну матрицю збалансованої ТЗ (рис. 5.2). Неможливість перевезень із Донецька в Луганськ моделюємо шляхом введення забороняючих тарифів.



	A	B	C	D	E	F	G	H
15	Транспортна матриця							
16	Виробничі бази	Оптові центри продажів						Запаси
17		Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород	
18	Харків	19,58	44,78	26,77	34,14	61,88	67,5	120
19	Полтава	9,01	53,14	31,07	24,8	57,97	64,69	120
20	Донецьк	37,6	43,61	200	51,18	66,59	71,29	80
21	Одеса	34,14	37,6	60,91	44,78	48,57	60,91	105
22	Фіктивн.	200	200	200	200	200	200	10
23	Потреби	40	60	100	125	60	50	

Рисунок 5.2 – Транспортна матриця збалансованої ТЗ

5.2. Складання оптимізаційної моделі збалансованої ТЗ

Економічним сенсом КЗ транспортної задачі будуть обсяги перевезень у певних напрямках. Кількість керованих змінних збалансованої задачі дорівнює $n \times m$, у нашому випадку $5 \times 6 = 30$, вони складатимуть матрицю:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Критерієм оптимальності буде мінімум сумарних транспортних витрат на здійснення всіх перевезень. Отже, сума КЗ, помножених на відповідні транспортні тарифи (вартості перевезень 1 т продукції) буде складати цільову функцію, яка мінімізується:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min. \quad (5.4)$$

Обмеження цієї оптимізаційної задачі будуть формуватися на основі умов повного вивозу продукції із всіх пунктів відправлення (виробничих баз):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 120; \quad (5.5)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 120; \quad (5.6)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 80; \quad (5.7)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 105; \quad (5.8)$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 10. \quad (5.9)$$

Інша група обмежень формується на основі умов повного забезпечення потреб усіх пунктів призначення (оптових центрів продажів):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 40; \quad (5.10)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 60; \quad (5.11)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100; \quad (5.12)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 125; \quad (5.13)$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 60; \quad (5.14)$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 50. \quad (5.15)$$

Окрім накладених вище обмежень, у ТЗ, як і в більшості інших економічних задачах МП, на КЗ накладається обмеження невід'ємності:

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (5.16)$$

В результаті сформулюємо оптимізаційну модель ТЗ:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min .$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 120; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 120; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 80; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 105; \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 10; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 40; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 60; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 125; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 60; \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 50; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \qquad (5.17)$$

Сформулювавши оптимізаційну модель ТЗ, далі перейдемо до її вирішення за допомогою надбудови «Пошук розв'язку» Microsoft Excel.

5.3. Створення матриці КЗ, підготовка їх до накладення обмежень. Введення ЦФ у Microsoft Excel

Як було показано вище, класична ТЗ відноситься до двохіндексних задач ЛП. Розмірність матриці КЗ збалансованої ТЗ буде складати $n \times m$, де n – кількість пунктів відправлення, m – кількість пунктів призначення. У Microsoft Excel матрицю КЗ виконуємо, як показано на рис 5.3.

До запуску надбудови «Пошук розв'язку» комірки, які відповідають КЗ, залишимо вільними, таким чином прийнявши початкові зазначення КЗ рівними 0. Для того щоб при роботі у надбудові «Пошук розв'язку» Microsoft Excel було зручно накласти обмеження (5.5) – (5.15) на КЗ, введемо суми комірок по рядкам та стовпчикам у матриці КЗ (рис. 5.3).

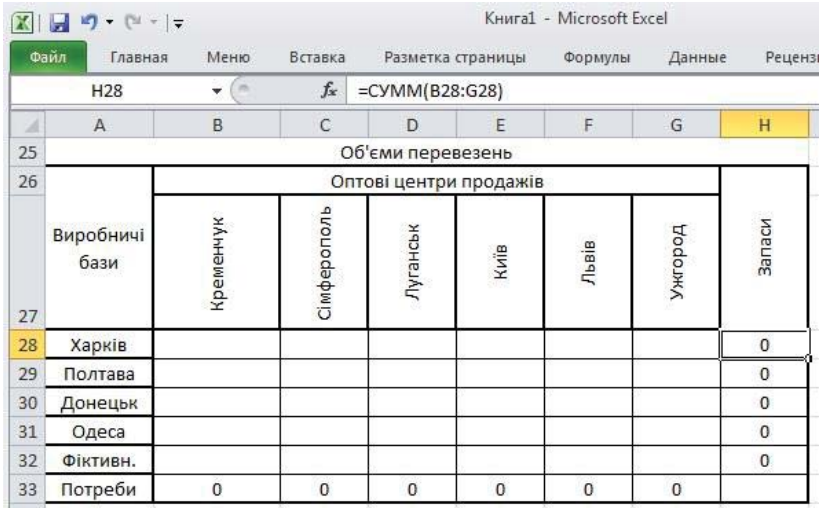


Рисунок 5.3 – Матриця КЗ із накладеними на них обмеженнями

Створимо матрицю (рис. 5.4) із ЦФ, в якій помножимо кожну КЗ на свій цільовий коефіцієнт. Нагадаємо, що цільовими коефіцієнтами в межах даної задачі будуть вартості перевезень 1т вантажу в певному напрямку.

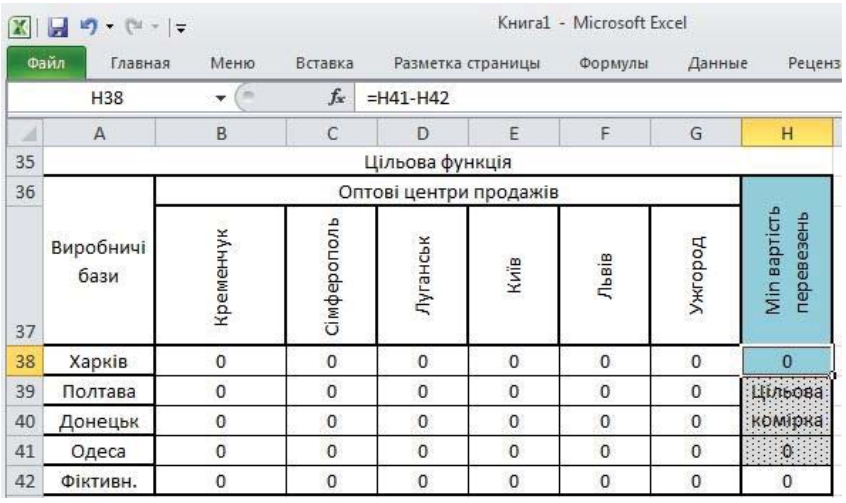


Рисунок 5.4 – Матриця із ЦФ

Цільовою коміркою буде комірка, в якій указана сума всіх добутків КЗ на свої цільові коефіцієнти, включаючи і фіктивні змінні. Однак потрібно пам'ятати, що реальна мінімальна вартість перевезень буде дорівнювати загальній вартості перевезень знайденою надбудовою «Пошук рішення» за виключенням вартості фіктивних перевезень, які на практиці здійснюватись не будуть (рис. 5.4). Проведена робота дозволяє нам перейти до знаходження оптимальних обсягів перевезень та екстремального значення ЦФ.

5.4. Рішення ТЗ за допомогою надбудови «Пошук розв'язку»

Після запуску надбудови в діалоговому вікні «Пошук розв'язку» потрібно вказати цільову комірку, в яку Microsoft Excel поверне екстремальне значення ЦФ (рис. 5.5). Також тут необхідно вказати, що ЦФ мінімізується. У рядку «Змінюючи комірки змінних» необхідно вказати посилання на комірки, в яких відображені КЗ (рис. 5.5).

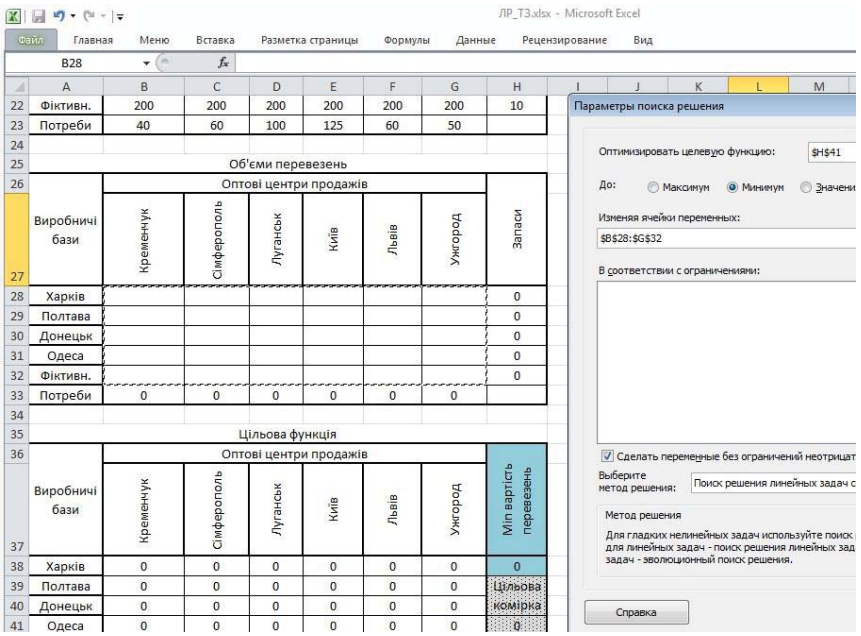


Рисунок 5.5 – Початок роботи із діалоговим вікном надбудови «Пошук розв'язку»

Далі у вікні «Обмеження» потрібно вказати, що суми КЗ за рядками дорівнюють запасам у пунктах відправлення, а суми КЗ за стовпчиками – потребам у пунктах призначення (рис. 5.6). Так на КЗ накладаються обмеження (5.5) – (5.15). Обмеження додаються шляхом натискання знака «Добавити» (рис. 5.6). У діалоговому вікні, що з'явилося в області «Посилання на комірку», вводяться адреси лівої частини обмеження, в області «Обмеження» вносяться адреси комірок, що визначають ПЧО. Також визначається логічне співвідношення між ними (в нашому випадку це знак «=») (рис. 5.7).

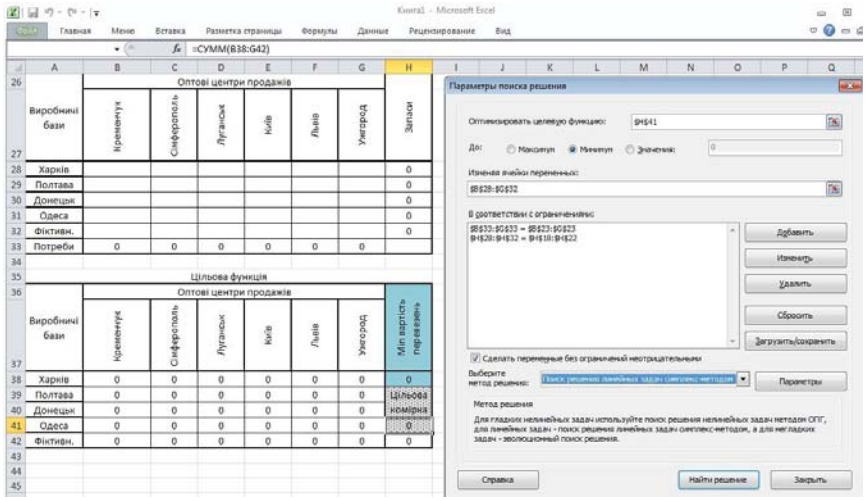


Рисунок 5.6 – Введення обмежень ТЗ, обмежень невід'ємності та методу рішень

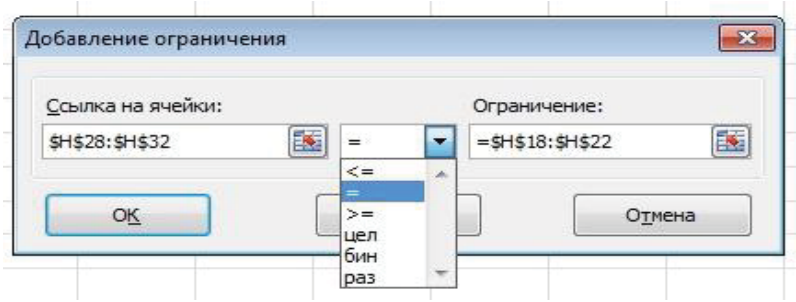


Рисунок 5.7 – Діалогове вікно додавання обмежень

Також необхідно пам'ятати, що у переважній більшості економічних оптимізаційних задач, в тому числі і нашій, на КЗ накладаються обмеження невід'ємності (5.16). Введення цих обмежень в діалоговому вікні «Параметри пошуку розв'язку» здійснюється шляхом встановлення прапорця навпроти «Зробити змінні без обмежень невід'ємними», в нижній частині діалогового вікна надбудови «Пошук розв'язку» (рис. 5.6). Як було сказано вище, наша задача належить до класу задач ЛП, тобто як метод розв'язання (рис. 5.6) обираємо «Пошук розв'язку лінійних задач симплекс-методом». Далі необхідно вказати параметри пошуку розв'язку як показано на рис. 5.8.

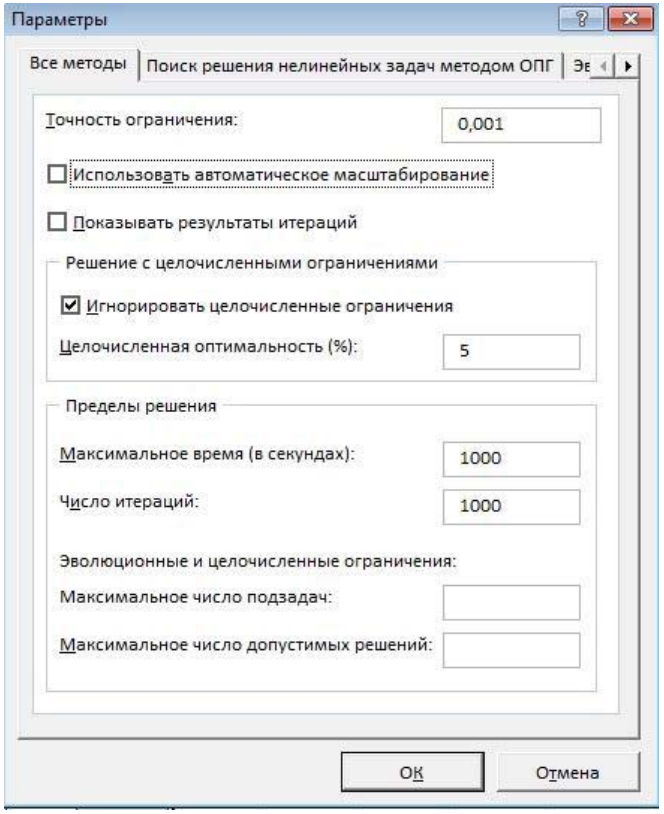


Рисунок 5.8 – Параметри пошуку рішення

У закладці «Всі методи» встановлюємо параметри, як показано на рис. 5.8. Величини точності обмеження і меж рішення (максимальний час та кількість ітерацій) мають бути тим більші, чим складніша задача. Ці параметри краще зазначати із певним запасом.

Після визначення параметрів пошуку рішення потрібно натиснути ОК і таким чином повернутися у попереднє діалогове вікно (рис. 5.6). У цьому вікні потрібно натиснути «Найти розв'язок». Запуститься процес пошуку оптимального розв'язання, після знайдення якого з'явиться вікно, де потрібно відмітити необхідні звіти та натиснути на ОК. Результати розв'язання та звіти наведені у додатку 5.

5.5. Запитання для висновків за результатами розв'язання задачі оптимізації закупівель та приклади відповідей

Зі звітів за результатами та стійкості необхідно дати економічну інтерпретацію отриманому розв'язку та проаналізувати його чутливість. Для цього потрібно відповісти на такі запитання.

1. Перевезення між якими пунктами та в яких обсягах увійдуть в оптимальний план?

В оптимальний план увійдуть перевезення в таких напрямках, а саме: із Харкова в Луганськ в обсязі 100 т, із Харкова в Київ в обсязі 20 т, із Полтави в Кременчук в обсязі 40 т, із Полтави в Київ в обсязі 80 т, із Донецька в Сімферополь в обсязі 60 т, із Донецька в Київ в обсязі 20 т, із Одеси в Київ в обсязі 5 т, із Одеси у Львів в обсязі 60 т, із Одеси в Ужгород в обсязі 40 т.

2. Указати загальну вартість кожного із реальних перевезень, які ввійшли в оптимальний план.

Вартість перевезень за напрямками, що ввійшли в оптимальний план, складає: із Харкова в Луганськ – 2677 у.о., із Харкова в Київ – 682,8 у.о., із Полтави в Кременчук – 360,4 у.о., із Полтави в Київ – 1984 у.о., із Донецька в Сімферополь – 2616,6 у.о., із Донецька в Київ – 1023,6 у.о., із Одеси в Київ – 223,9 у.о., із Одеси у Львів – 2914,2 у.о., із Одеси в Ужгород – 2436 у.о.

3. Якщо в задачі потреби перевищували запаси, які із пунктів призначення недоотримають продукцію? Якщо в задачі запаси перевищували потреби, то в яких пунктах відправлення залишиться продукція? Указати в яких обсягах.

Оптовий центр продажів в Ужгороді недоотримає продукцію в обсязі 10 т.

4. Чому дорівнює загальна вартість кожного із фіктивних перевезень?

Вартість перевезення із фіктивного пункту відправлення в Ужгород дорівнює 2000 у.о.

5. Чому дорівнюють реальні мінімальні транспортні витрати?

Реальні мінімальні транспортні витрати становлять 14918,9 у.о.

6. Указати збиткові перевезення та ті перевезення, що не є збитковими але не увійшли в оптимальний план перевезень (якщо такі є).

Всі перевезення, що не увійшли в оптимальний план, є збитковими.

7. В яких межах можуть змінюватися ПЧО так, щоб мінімальне значення ЦФ залишилося незмінним при незмінних інших числових характеристиках оптимізаційної моделі.

Запаси в пунктах призначення можуть змінюватися в таких межах: $120 \le a_1 \le 125$; $120 \le a_2 \le 125$; $80 \le a_3 \le 85$; $-\infty \le a_4 \le 105$; $10 \le a_5 \le 50$ так, щоб при усіх інших незмінних числових характеристиках моделі оптимальне рішення залишилося тим же самим.

Потреби в пунктах відправлення можуть змінюватися в таких межах: $35 \le b_1 \le 40$; $55 \le b_2 \le 60$; $95 \le b_3 \le 100$; $120 \le b_4 \le 125$; $0 \le b_5 \le 60$; $10 \le b_6 \le 50$ так, щоб при всіх інших незмінних числових характеристиках моделі оптимальне рішення залишилося тим же самим.

5.6. Варіанти для виконання лабораторної роботи

При виконанні лабораторно-практичної роботи пункти відправлення та пункти призначення співпадають для всіх варіантів. Транспортні тарифи для усіх варіантів беруться із табл. 5.1. Запаси в пунктах відправлення, а також заборонені напрямки перевезень, наведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Запаси в пунктах відправлення та заборонені перевезення

Варіант	Запаси, т				Перевезення неможливі через форс-мажорні причини
	Харків	Полтава	Донецьк	Одеса	
1	110	90	85	125	із Полтави у Київ
2	90	130	100	120	із Донецька у Кременчук
3	100	80	100	120	із Харкова у Київ
4	100	60	130	120	із Одеси в Сімферополь
5	100	90	80	120	із Одеси в Луганськ
6	100	120	90	130	із Полтави в Сімферополь
7	100	100	90	80	із Полтави в Кременчук
8	100	80	130	120	із Донецька в Київ
9	100	90	80	120	із Одеси в Ужгород
10	100	110	90	120	із Харкова в Ужгород
11	110	100	110	120	із Донецька в Сімферополь
12	100	60	130	120	із Одеси в Київ

Потреби в пунктах призначення наведені у табл. 5.3. Номер варіанта студент обирає за номером комп'ютера, де виконується лабораторна робота.

Таблиця 5.3 – Потреби в пунктах призначення

Варіант	Потреби, т					
	Кременчуг	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород
1	40	80	100	100	60	50
2	40	80	90	100	60	50
3	50	80	100	100	50	50
4	40	80	90	80	60	50
5	50	80	90	80	60	50
6	90	100	80	50	50	40
7	50	80	90	80	50	50
8	50	80	90	70	60	50
9	50	60	100	100	80	50
10	40	80	90	100	60	50
11	70	70	100	100	80	50
12	40	80	90	80	60	50

Список рекомендованої літератури

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг; пер. с англ. – М. : Физматгиз, 1961. – 310 с.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.
3. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
4. Алесинская Т.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование : учеб.-метод. Пособ. / Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.
5. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.
6. Економіко-математичне моделювання: навч. посіб. ; За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.

Лабораторна робота 6
РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL

Мета роботи – набуття навичок розвязання задачі про призначення за допомогою надбудови «Пошук розв'язку» Microsoft Excel.

6.1. Створення збалансованої матриці задачі в Microsoft Excel

Задача. У зв'язку із розширенням підприємство оголосило конкурс на дві нові посади. На ці посади претендують троє співробітників, які вже працюють на підприємстві, та чотири нових претендента. Відділ кадрів оцінив за дванадцятибальною шкалою компетентність співробітників, що вже працюють на підприємстві, та чотирьох нових претендентів для роботи на нових та існуючих посадах. Результати такої оцінки наведені в табл. 6.1.

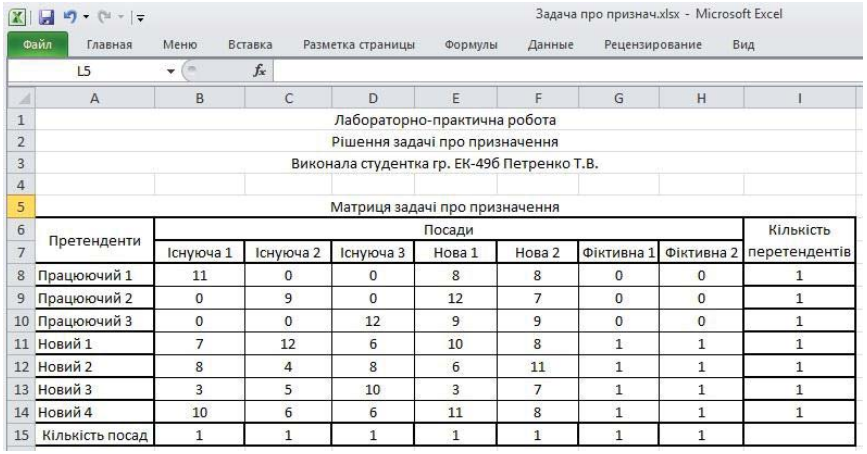
Таблиця 6.1 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	11	10	10	8	8
Працюючий 2	8	9	10	12	7
Працюючий 3	11	9	12	9	9
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	8	4	8	6	11
Новий 6	3	5	10	3	7
Новий 7	10	6	6	11	8

Необхідно врахувати, що керівництво не бажає звільняти співробітників, які вже працюють на підприємстві, а також, щоб вони претендували на посади один одного. Необхідно розподілити претендентів за посадами таким чином, щоб сумарна їх компетентність була максимальною, при заданих обмеженнях.

Загальна кількість претендентів 7 чоловік ($n = 7$), а загальна кількість посад 5 ($m = 5$). Оскільки $n \neq m$, то задача про призначення незбалансована. Збалансовану матрицю задачі про призначення можна створити ввівши дві фіктивні посади. Потрапляння одиниці на перетин рядка, що відображає певного претендента, та фіктивного стовпчика означає, що цей претендент не

буде прийнятий на роботу. Для дозволу та заборони таких ситуацій необхідно вдало обрати фіктивні цільові коефіцієнти. Шляхом введення відповідних цільових коефіцієнтів також моделюється ситуація заборони зарахування працюючих співробітників на посади один одного (рис. 6.1).



Претенденти	Посади							Кількість перетендентів
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2	Фіктивна 1	Фіктивна 2	
Працюючий 1	11	0	0	8	8	0	0	1
Працюючий 2	0	9	0	12	7	0	0	1
Працюючий 3	0	0	12	9	9	0	0	1
Новий 1	7	12	6	10	8	1	1	1
Новий 2	8	4	8	6	11	1	1	1
Новий 3	3	5	10	3	7	1	1	1
Новий 4	10	6	6	11	8	1	1	1
Кількість посад	1	1	1	1	1	1	1	

Рисунок 6.1 – Оформлення матриці задачі про призначення в Microsoft Excel

6.2. Складання оптимізаційної моделі задачі про призначення

КЗ задачі про призначення є бульовими, тобто на них накладається обмеження:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \qquad (6.1)$$

Економічним сенсом КЗ задачі буде визначення, чи призначений i-й претендент на j-у посаду. Якщо змінна $x_{ij} = 1$, то призначений, якщо $x_{ij} = 0$, то ні. У збалансованій задачі про призначення КЗ будуть складати матрицю (6.2) розмірністю $n \times m$, причому $n = m$. Критерієм оптимальності буде сумарна компетентність співробітників на посадах. Отже, сума КЗ, помножених на відповідні цільові коефіцієнти (оцінка компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад) буде складати ЦФ (6.3), яка максимізується.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \max. \quad (6.3)$$

Виходячи із умови, що на одну посаду може бути призначений один, і лише один із претендентів формулюються обмеження:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1; \quad (6.4)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} = 1; \quad (6.5)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} = 1; \quad (6.6)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} = 1; \quad (6.7)$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} = 1; \quad (6.8)$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} = 1; \quad (6.9)$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{77} = 1. \quad (6.10)$$

Виходячи із умови, що кожен із претендентів може бути призначений на одну і тільки одну посаду формулюються обмеження:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1; \quad (6.11)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1; \quad (6.12)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 1; \quad (6.13)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 1; \quad (6.14)$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} = 1; \quad (6.15)$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} = 1; \quad (6.16)$$

$$x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} = 1. \quad (6.17)$$

В результаті узагальнення співвідношень (6.3)-(6.17), а також умови бінарності змінних (6.1), сформулюємо оптимізаційну модель задачі про призначення:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} = 1; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} = 1; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} = 1; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} = 1; \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} = 1; \\ x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{77} = 1; \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 1; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 1; \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} = 1; \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} = 1; \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} = 1; \\ x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \end{cases}$$

Сформулювавши оптимізаційну модель задачі про призначення, перейдемо до її вирішення за допомогою надбудови «Пошук розв’язку» Microsoft Excel.

6.3. Створення матриці КЗ, підготовка їх до накладення обмежень. Введення ЦФ в Microsoft Excel

Задача про призначення відноситься до двохіндексних задач ЛП. У Microsoft Excel матрицю КЗ (6.2) подамо як показано на рис 6.2. До запуску надбудови «Пошук розв'язку» комірки, які відповідають КЗ, залишимо вільними. Для того щоб при роботі у надбудові «Пошук розв'язку» Microsoft Excel було зручно накласти обмеження (6.4) – (6.17) на КЗ, введемо суми комірок за рядками та стовпчиками у матрицю КЗ (рис. 6.2).

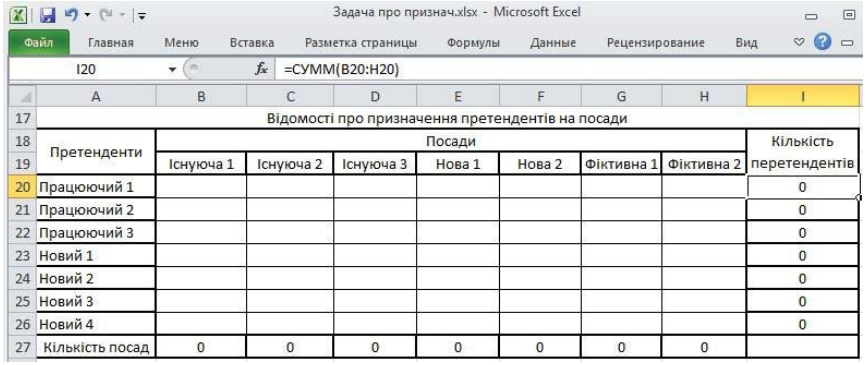


Рисунок 6.2 – Подання матриці КЗ у Microsoft Excel

Створимо матрицю (рис. 6.3) із ЦФ, в якій помножимо кожну КЗ на свій цільовий коефіцієнт. Цільовими коефіцієнтами в рамках даної задачі будуть оцінки компетентності кожного із претендентів при роботі на кожній із посад.

Цільовою коміркою буде комірка, в якій указана сума всіх добутків КЗ на свої цільові коефіцієнти, включаючи і фіктивні змінні. Однак потрібно пам'ятати, що реальна максимальна загальна оцінка компетентності співробітників буде дорівнювати загальній максимальній компетентності співробітників за виключенням фіктивних посад. Визначати реальну максимальну загальну оцінку компетентності співробітників не будемо, тому що в рамках даної задачі для нас більш важливою є інформація про розподілення претендентів на посади.

Перейдемо до знаходження оптимального за критерієм максимальної сумарної компетентності розподілення претендентів за посадами.

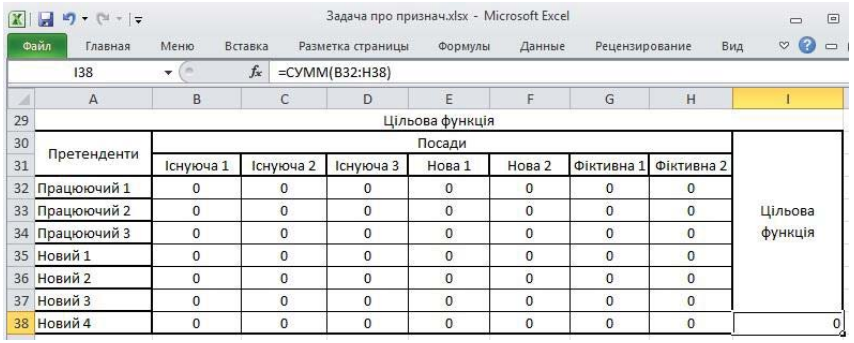


Рисунок 6.3 – Введення ЦФ задачі про призначення в Microsoft Excel

6.4 Розв'язання задачі про призначення за допомогою надбудови «Пошук розв'язку» Microsoft Excel

Після запуску надбудови у діалоговому вікні «Пошук розв'язку» потрібно вказати цільову комірку, в яку Microsoft Excel поверне екстремальне значення ЦФ (рис. 6.4). Також необхідно вказати, що шукається максимум ЦФ. У рядку «Змінюючи комірки змінних» необхідно вказати посилання на комірки, в які відображають КЗ (рис. 6.4).

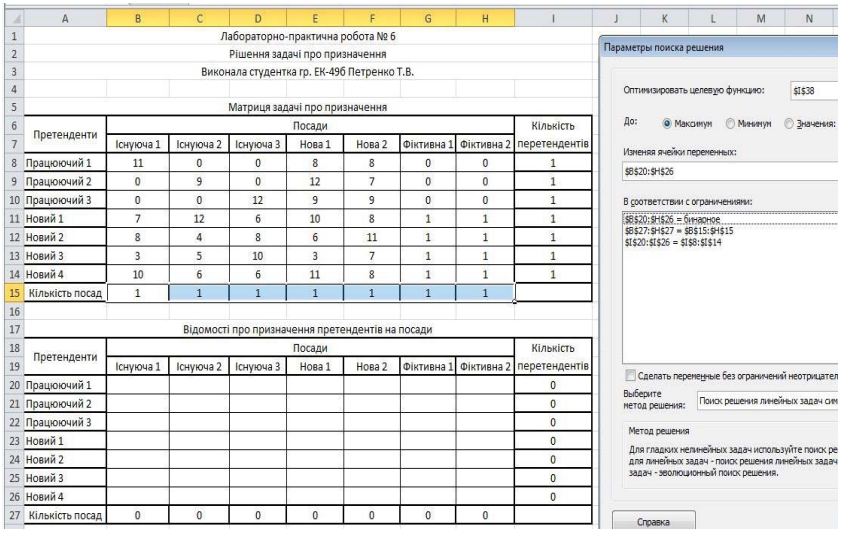


Рисунок 6.4 – Введення ЦФ та КЗ у надбудову «Пошук розв'язку»

Далі у вікні «Обмеження» потрібно вказати, що суми КЗ за рядкми та стовпчиками дорівнюють одиницям (рис. 6.4). Таким чином на КЗ накладаються обмеження (6.4) – (6.17).

Обмеження додаються шляхом натискання значка «Добавити». У діалоговому вікні, що з'явилося в ділянці «Посилання на комірку», вводяться адреси комірок, на які накладаються обмеження, в ділянці «Обмеження» вносяться адреси комірок, що визначають обмеження. Також визначається логічне співвідношення між ними (рис. 6.5). Також в обмеженнях необхідно вказати, що КЗ бульові, тобто бінарні (рис. 6.6).

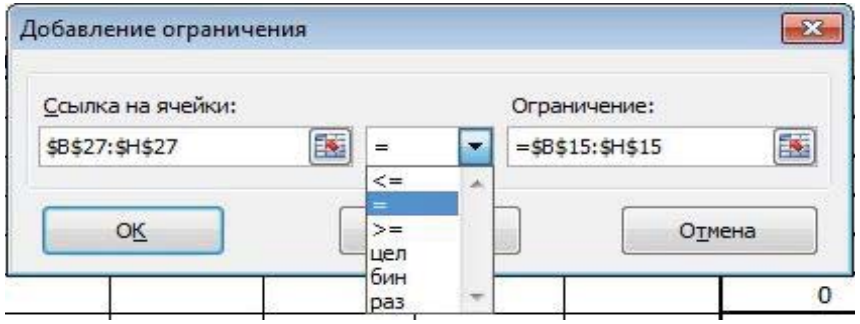


Рисунок 6.5 – Діалогове вікно додавання обмежень

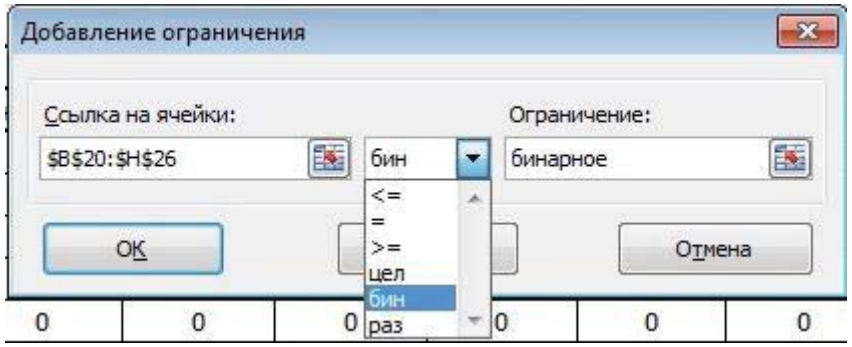


Рисунок 6.6 – Накладення на КЗ обмеження двоїстості

Далі потрібно натиснути на кнопку ОК і, таким чином, повернутися у попереднє діалогове вікно (рис. 6.5). У цьому вікні потрібно натиснути «Найти розв'язання». Запуститься процес пошуку оптимального розв'язання, після знайдення якого, з'явиться вікно «Результати пошуку розв'язку», в якому потрібно встановити прапорець «Зберегти знайдене розв'язання» та натиснути на ОК. Звіти зі стійкості та межам не застосовуються до задач із цілочисельними КЗ. Тому у вікні «Результати пошуку розв'язку» можна відмітити тільки звіт за результатами, хоча він і не несе додаткової інформації порівняно із аркушем Microsoft Excel, в якому проводилися розрахунки. Приклад оформлення лабораторної роботи наведений у додатку 6.

При використанні задач про призначення для прийняття управлінських рішень в управлінні персоналом потрібно пам'ятати, що отримані результати можуть носити лише характер рекомендацій. Багато аспектів прийняття рішень при розподіленні співробітників за посадами, а також прийнятті нових співробітників не підлягають формалізації, і таким чином не можуть бути вираженими мовою математики. Тому прийняття остаточних рішень у цій сфері залежить від компетентності та професіоналізму менеджерів із персоналу.

6.5. Варіанти для виконання лабораторної роботи

Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад наведені нижче за варіантами. Номер варіанта студент обирає за номером комп'ютера, де виконується лабораторна робота.

Таблиця 6.2 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 1

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	12	4	10	8	8
Працюючий 2	7	10	7	6	10
Працюючий 3	3	9	11	9	9
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	8	3	8	12	11
Новий 6	10	5	12	3	7
Новий 7	5	7	6	11	9

Таблиця 6.3 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 2

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	10	7	7	8	12
Працюючий 2	8	12	10	12	7
Працюючий 3	8	9	12	9	9
Новий 4	9	12	11	3	8
Новий 5	8	4	8	10	11
Новий 6	11	10	5	3	7
Новий 7	4	7	6	11	8

Таблиця 6.4 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 3

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	11	4	10	8	8
Працюючий 2	7	9	7	6	11
Працюючий 3	3	9	12	11	9
Новий 4	7	8	6	4	8
Новий 5	8	3	8	3	11
Новий 6	10	12	12	3	7
Новий 7	5	7	6	11	12

Таблиця 6.5 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 4

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	12	4	10	8	12
Працюючий 2	7	11	7	6	10
Працюючий 3	9	8	12	9	9
Новий 4	7	9	6	10	8
Новий 5	8	3	8	11	11
Новий 6	4	5	5	7	7
Новий 7	5	7	6	11	9

Таблиця 6.6 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 5

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	12	4	10	8	8
Працюючий 2	7	10	7	6	10
Працюючий 3	3	9	9	9	12
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	8	3	8	12	11
Новий 6	2	5	6	12	10
Новий 7	5	7	6	6	9

Таблиця 6.7 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 6

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	9	4	10	12	8
Працюючий 2	7	10	7	6	10
Працюючий 3	3	9	11	9	9
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	8	3	8	2	12
Новий 6	10	5	12	10	7
Новий 7	5	7	6	7	9

Таблиця 6.8 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 7

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	11	4	10	8	8
Працюючий 2	7	12	7	6	9
Працюючий 3	3	9	12	3	9
Новий 4	9	8	6	4	10
Новий 5	8	3	8	3	7
Новий 6	9	12	9	11	6
Новий 7	5	7	6	12	12

Таблиця 6.9 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 8

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	10	4	10	8	8
Працюючий 2	7	11	7	6	10
Працюючий 3	9	8	12	3	9
Новий 4	7	9	6	10	8
Новий 5	8	3	8	11	3
Новий 6	4	12	5	12	11
Новий 7	5	7	11	11	9

Таблиця 6.10 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 9

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	12	10	12	11	12
Працюючий 2	12	12	12	9	10
Працюючий 3	11	12	12	12	12
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	8	11	8	4	11
Новий 6	2	12	6	12	5
Новий 7	5	7	6	6	9

Таблиця 6.11 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 10

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	9	9	9	12	11
Працюючий 2	7	10	7	6	10
Працюючий 3	3	9	11	9	9
Новий 4	7	12	6	3	8
Новий 5	8	3	8	11	12
Новий 6	10	5	12	3	7
Новий 7	5	12	6	7	11

Таблиця 6.12 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 11

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	9	9	12	12	12
Працюючий 2	7	9	12	12	12
Працюючий 3	8	7	8	9	12
Новий 4	7	12	6	10	8
Новий 5	12	11	8	4	11
Новий 6	2	12	6	12	5
Новий 7	5	7	6	6	9

Таблиця 6.13 – Результати оцінки компетентності кожного із претендентів для роботи на кожній із посад для варіанта 12

Претенденти	Посади				
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2
Працюючий 1	9	9	9	12	11
Працюючий 2	7	10	7	6	10
Працюючий 3	3	9	11	9	12
Новий 4	7	12	6	11	8
Новий 5	8	3	8	4	3
Новий 6	8	5	6	3	5
Новий 7	5	12	6	7	5

Список рекомендованої літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

2. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

3. Алесинская Т.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование : учеб.-метод. пособ. / Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.

4. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.

5. Економіко-математичне моделювання: навч. посіб.; За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.

Лабораторна робота 7
РІШЕННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ПРИКЛАДІ СТАТИЧНОЇ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ БЕЗДЕФІЦИТНОЇ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Мета роботи: – набуття студентами практичних навичок формалізації та розв'язання засобами Mathcad та Microsoft Excel задач НП, на прикладі статичної детермінованої бездефіцитної моделі управління запасами. Економічна інтерпретація отриманих результатів.

7.1. Графічне та аналітичне визначення, засобами Mathcad, оптимального розміру партії закупівлі продукту в запас

Витрати на створення запасу однієї партії продукту позначимо через c_1, тоді загальні витрати на створення запасів в обсязі N:

$$C_1(n) = c_1 \cdot \frac{N}{n}. \qquad (7.1)$$

Витрати на зберігання одиниці продукції позначимо через c_2. Тоді витрати на зберігання всього запасу при лінійній за часом його витрати дорівнюють витратам на зберігання середнього запасу:

$$C_2(n) = c_2 \cdot \frac{n \cdot \tau}{2}. \qquad (7.2)$$

Враховуючі залежності (7.1) та (7.2), сумарні витрати на створення та зберігання запасу визначаються залежністю, яку необхідно мінімізувати:

$$C(n) = c_1 \cdot \frac{N}{n} + c_2 \cdot \frac{n \cdot \tau}{2}. \qquad (7.3)$$

Графіки залежностей витрат на створення та зберігання запасів, а також залежності загальних витрат від розміру партії закупівлі наведений на рис. 7.1. Ці графіки побудовані для загального споживання продукту в обсязі $N = 1000$ одиниць за час $\tau = 30$ днів. Вартість створення однієї партії запасу $c_1 = 120$ грн, а вартість зберігання одиниці продукції $c_2 = 20$ грн. У табл. 7.1. наведені значення вказаних економічних параметрів за варіантами.

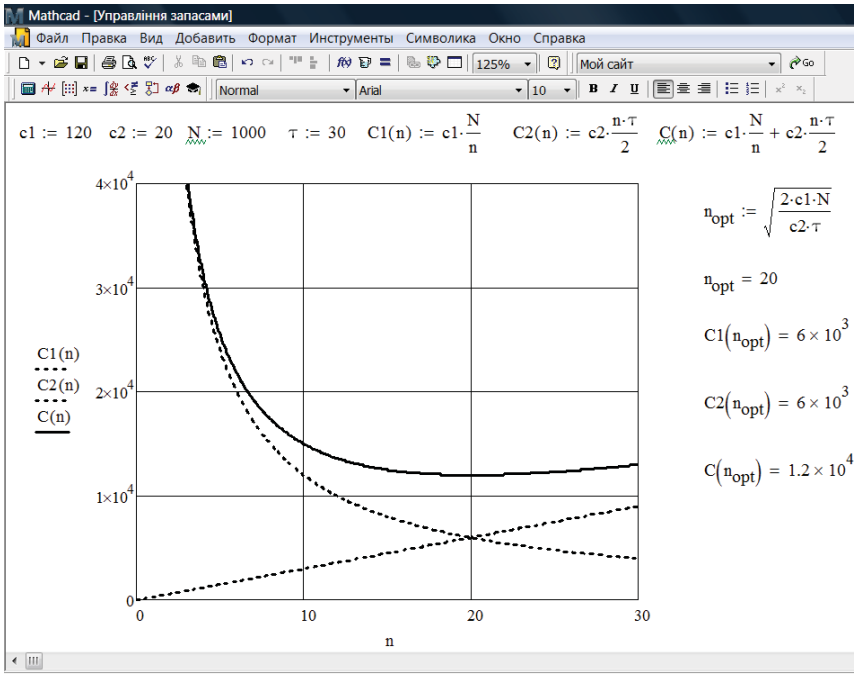


Рисунок 7.1 – Визначення оптимального розміру партії замовлення продукту в запас

Таблиця 7.1 – Варіанти для визначення оптимального розміру партії закупівлі продукту в Mathcad

Параметри	Номери варіантів											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	900	630	750	850	600	330	570	920	430	270	700	950
τ	30	20	25	30	20	10	20	30	15	10	20	30
c_1	100	90	70	90	83	60	90	105	85	50	92	95
c_2	20	30	20	32	27	15	25	32	22	12	28	25

Після графічного визначення оптимального розміру партії замовлення продукту в запас, зробимо це аналітично за формулою Уілсона. Далі окремо розрахуємо значення витрат на створення та зберігання оптимального значення запасу, а також мінімальне значення сумарних витрат (рис. 7.1).

Практичні задачі управління запасами, скоріше за все, будуть вимагати визначення оптимального розміру партії замовлення не одного продукту, а декількох. Окрім цього, вони можуть містити додаткові обмеження, наприклад за максимальною місткістю складу, максимально допустимою величиною бюджету на придбання запасів тощо. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі.

7.2. Визначення, засобами Microsoft Excel, оптимальних розмірів партій закупівель продуктів в запас

7.2.1. Безумовна оптимізація розмірів партій закупівель

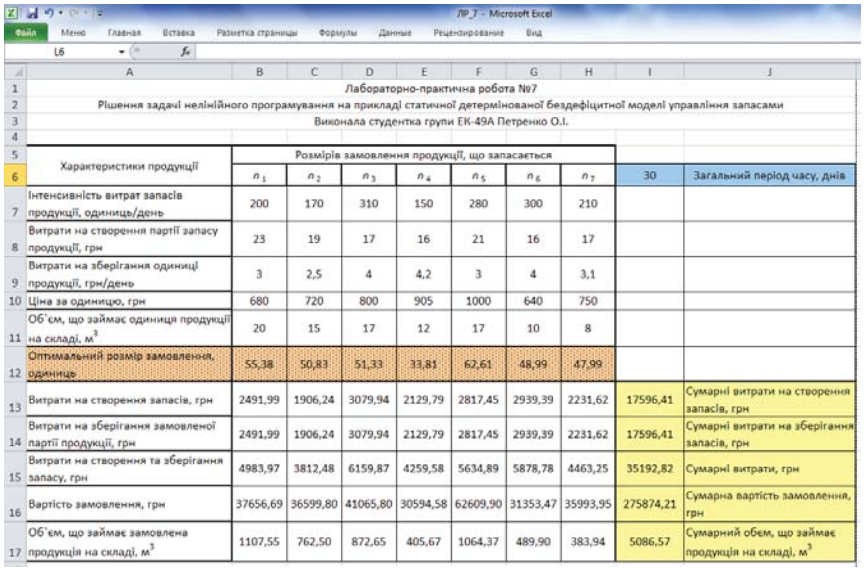
В умовах даної задачі вектор КЗ $n_1,\ldots,n_7$ буде складатися із розмірів замовлення сімох видів продуктів. Як критерій оптимальності будуть виступати мінімальні сумарні витрати на створення та зберігання запасів.

Перш за все, створимо електронну форму Microsoft Excel (верхня частина рис. 7.2), в яку внесемо вихідні дані згідно із варіантами (пункт 7.4).

За формулами, які були взяті із лекційній частині курсу, проведемо необхідні розрахунки. При виконанні розрахунків необхідно пам'ятати, що загальний період часу 30 днів, залишається постійним для всіх семи видів запасів. Отже, посилання на відповідну комірку має бути абсолютним. Результат безумовної оптимізації розмірів партій закупівель продуктів в запас наведений на рис. 7.2.

7.2.2. Умовна оптимізація розмірів партій закупівель

На новому аркуші створимо електронну форму Microsoft Excel (рис. 7.3), в яку внесемо вихідні дані згідно із варіантами (див. пункт 7.4). У новій формі окрім даних, що характеризують окремі види запасів, внесемо також максимально допустимий бюджет на купівлю запасів та максимальний обсяг складу. При проведенні умовної оптимізації використання рівняння Уілсона із окремим визначенням оптимального розміру замовлення кожного із продуктів є недопустимим. Тому в даній задачі будемо використовувати метод узагальненого приведеного градієнта, реалізований надбудовою «Пошук розв'язку» Microsoft Excel. У формулах для витрат на створення запасів розмір замовлення записується у знаменнику, тому як початкові значення КЗ оберемо значення, що відрізняються від нуля, наприклад одиниці.



ЛР_7 - Microsoft Excel

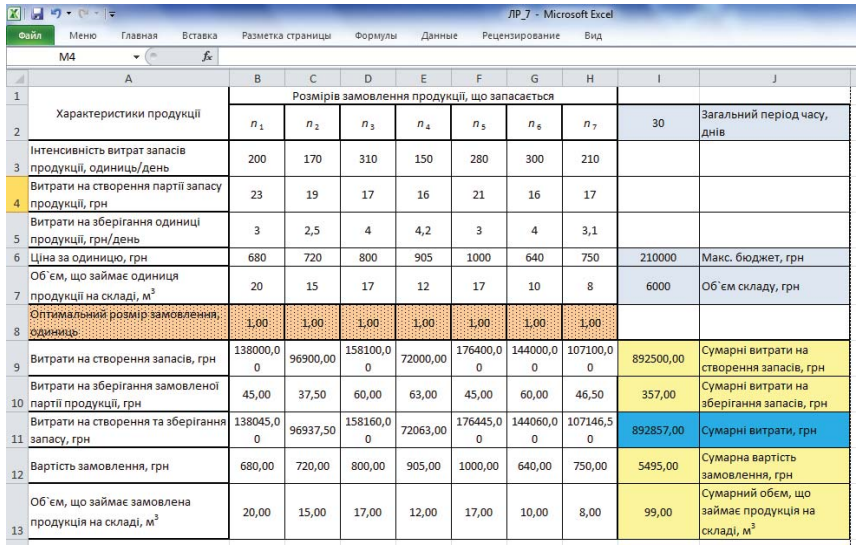
Лабораторно-практична робота №7

Рішення задачі нелінійного програмування на прикладі статичної детермінованої бездефіцитної моделі управління запасами

Виконала студентка групи ЕК-49А Петренко О.І.

Характеристики продукції	Розмірів замовлення продукції, що запасається								
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	30	Загальний період часу, днів
Інтенсивність витрат запасів продукції, одиниць/день	200	170	310	150	280	300	210		
Витрати на створення партії запасу продукції, грн	23	19	17	16	21	16	17		
Витрати на зберігання одиниці продукції, грн/день	3	2,5	4	4,2	3	4	3,1		
Ціна за одиницю, грн	680	720	800	905	1000	640	750		
Об`єм, що займає одиниця продукції на складі, м^3	20	15	17	12	17	10	8		
Оптимальний розмір замовлення, одиниць	55,38	50,83	51,33	33,81	62,61	48,99	47,99		
Витрати на створення запасів, грн	2491,99	1906,24	3079,94	2129,79	2817,45	2939,39	2231,62	17596,41	Сумарні витрати на створення запасів, грн
Витрати на зберігання замовленої партії продукції, грн	2491,99	1906,24	3079,94	2129,79	2817,45	2939,39	2231,62	17596,41	Сумарні витрати на зберігання запасів, грн
Витрати на створення та зберігання запасу, грн	4983,97	3812,48	6159,87	4259,58	5634,89	5878,78	4463,25	35192,82	Сумарні витрати, грн
Вартість замовлення, грн	37656,69	36599,80	41065,80	30594,58	62609,90	31353,47	35993,95	275874,21	Сумарна вартість замовлення, грн
Об`єм, що займає замовлена продукція на складі, м^3	1107,55	762,50	872,65	405,67	1064,37	489,90	383,94	5086,57	Сумарний обєм, що займає продукція на складі, м^3

Рисунок 7.2 – Результат безумовної оптимізації розмірів партій закупівель



ЛР_7 - Microsoft Excel

Характеристики продукції	Розмірів замовлення продукції, що запасається								
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	30	Загальний період часу, днів
Інтенсивність витрат запасів продукції, одиниць/день	200	170	310	150	280	300	210		
Витрати на створення партії запасу продукції, грн	23	19	17	16	21	16	17		
Витрати на зберігання одиниці продукції, грн/день	3	2,5	4	4,2	3	4	3,1		
Ціна за одиницю, грн	680	720	800	905	1000	640	750	210000	Макс. бюджет, грн
Об`єм, що займає одиниця продукції на складі, м^3	20	15	17	12	17	10	8	6000	Об`єм складу, грн
Оптимальний розмір замовлення, одиниць	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00		
Витрати на створення запасів, грн	138000,00	96900,00	158100,00	72000,00	176400,00	144000,00	107100,00	892500,00	Сумарні витрати на створення запасів, грн
Витрати на зберігання замовленої партії продукції, грн	45,00	37,50	60,00	63,00	45,00	60,00	46,50	357,00	Сумарні витрати на зберігання запасів, грн
Витрати на створення та зберігання запасу, грн	138045,00	96937,50	158160,00	72063,00	176445,00	144060,00	107146,50	892857,00	Сумарні витрати, грн
Вартість замовлення, грн	680,00	720,00	800,00	905,00	1000,00	640,00	750,00	5495,00	Сумарна вартість замовлення, грн
Об`єм, що займає замовлена продукція на складі, м^3	20,00	15,00	17,00	12,00	17,00	10,00	8,00	99,00	Сумарний обєм, що займає продукція на складі, м^3

Рисунок 7.3 – Результат умовної оптимізації розмірів партій закупівель

Як цільова буде виступати комірка із сумарними витратами на створення та зберігання всіх видів продуктів, що запасаються. Запустимо в ній надбудову «Пошук розв'язку» (рис. 7.4). У діалоговому вікні надбудови вкажемо напрямок оптимізації, вектор КЗ, обмеження, метод розв'язання.

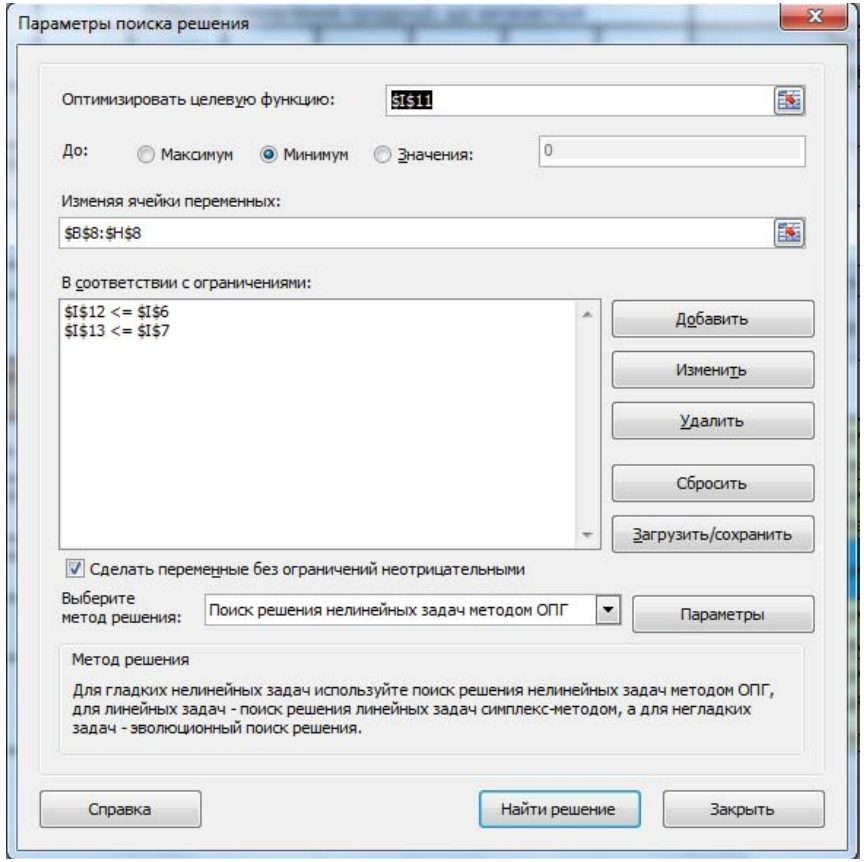


Рисунок 7.4 – Діалогове вікно надбудови «Пошук рішення» для рішення задачі НП

Після заповнення діалогового вікна натиснемо «Знайти рішення». Результати рішення задачі та звіти по результатам та стійкості наведені в додатку 7.

7.3. Запитання для висновків за результатами розв'язання задачі оптимізації закупівель та прикладами відповідей

За результатами оптимізації розмірів партій закупівель продуктів в запас потрібно відповісти на такі запитання:

1. Указати розміри партій закупівель продукції в запас та сумарні витрати на їх створення та зберігання, отримані при безумовній оптимізації.

При безумовній оптимізації розміри партій закупівель продуктів в запас будуть складати 1-го – 55,38 од, 2-го – 50,83 од., 3-го – 51,33 од., 4-го – 33,81 од., 5-го – 62,61 од., 6-го – 48,99 од., 7-го – 47,99 од. Сумарні витрати на створення та зберігання запасів будуть складати 35192,82 грн.

2. Указати розміри партій закупівель продукції в запас та сумарні витрати на їх створення та зберігання, отримані при безумовній оптимізації.

При умовній оптимізації розміри партій закупівель продуктів в запас будуть складати 1-го – 42,8 од, 2-го – 37,31 од., 3-го – 40,65 од., 4-го – 26,39 од., 5-го – 44,37 од., 6-го – 40,33 од., 7-го – 36,6 од. Сумарні витрати на створення та зберігання запасів будуть складати 36456,6 грн.

3. Указати збиткові види запасів, якщо такі є.

У даній задачі збиткових видів запасів немає.

4. Визначити, як вплинули обмеження на оптимальне розв'язання.

Присутність обмежень погіршила оптимальне рішення на 1263,78 грн.

5. Яке із обмежень є зв'язуючим?

Оптимальне рішення при умовній оптимізації визначає обмеження максимального бюджету.

6. Запропонувати заходи з покращення оптимального розв'язку.

Для покращення оптимального розв'язання доцільно перерозподілити кошти між бюджетом на купівлю запасів та витратами на їх створення та зберігання.

7.4. Варіанти для виконання лабораторної роботи

При виконанні лабораторно-практичної роботи значення інтенсивності витрат запасів продукції $n_1,\ldots,n_7$ для всіх варіантів беруться з табл. 7.2. Загальний період часу, максимальний бюджет та обсяг складу наведені в табл. 7.3. Номер варіанта студент обирає за номером комп'ютера, за яким виконується лабораторна робота.

Таблиця 7.2 – Інтенсивність витрат запасів продукції

Номери варіантів	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7
1	154	131	238	115	215	231	162
2	333	283	517	250	467	500	350
3	250	213	388	188	350	375	263
4	133	113	207	100	187	200	140
5	118	100	182	88	165	176	124
6	143	121	221	107	200	214	150
7	200	170	310	150	280	300	210
8	167	142	258	125	233	250	175
9	222	189	344	167	311	333	233
10	286	243	443	214	400	429	300
11	125	106	194	94	175	188	131
12	182	155	282	136	255	273	191

Таблиця 7.3 – Інші числові характеристики моделі

Номери варіантів	Загальний період часу, днів	Максимальний бюджет, грн	Об`єм складу, грн.
1	39	162000	4700
2	18	350000	10000
3	24	262500	7500
4	45	140000	4000
5	51	124000	3600
6	42	150000	4300
7	30	210000	6000
8	36	175000	5000
9	27	234000	6700
10	21	300000	8600
11	48	132000	3800
12	33	19100	5500

Список рекомендованої літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
3. Економіко-математичне моделювання: навч. посіб.; За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
4. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.

ДОДАТОК 1

Результат та оформлення лабораторної роботи 1

Завдання 1

№	Кількість товару, одиниць	Ціна за одиницю, грн	Вартість товару, грн
1	12	105	1260
2	2	11	22
3	7	8	56
4	10	75	750
5	15	23	345
5	17	2,5	42,5
7	11	0,7	7,7
8	1	180	180
9	0,5	2000	1000
10	100	5	500
Сумарна вартість, грн.			4163,20

Завдання 2

Розряд єдиної тарифної сітки	Тарифний коефіцієнт	Посадовий оклад, грн
1	1	613
2	1,09	668,17
3	1,18	723,34
4	1,27	778,51
5	1,36	833,68
6	1,45	888,85
7	1,54	944,02
8	1,64	1005,32
9	1,73	1060,49
10	1,82	1115,66
11	1,97	1207,61
12	2,12	1299,56
13	2,27	1391,51
14	2,42	1483,46
15	2,58	1581,54
16	2,79	1710,27
17	3	1839
18	3,21	1967,73
19	3,42	2096,46
20	3,64	2231,32
21	3,85	2360,05
22	4,06	2488,78
23	4,27	2617,51
24	4,36	2672,68
25	4,51	2764,63

Завдання 3

№	Наіменування товару	Ціна за певну кількість товару, грн									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Олівець	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	Ручка	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15
3	Папір А4	32	64	96	128	160	192	224	256	288	320
4	Папір А3	70	140	210	280	350	420	490	560	630	700
5	Клей ПВА	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	Клей-олівець	6,25	12,5	18,75	25	31,25	37,5	43,75	50	56,25	62,5
7	Блокнот	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
8	Ножиці	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
9	Скоч	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
10	Папка пласт.	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100	112,5	125
11	Папка картон.	3,2	6,4	9,6	12,8	16	19,2	22,4	25,6	28,8	32
12	Файл	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
13	Зошит 12 арк.	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3	17
14	Зошит 36 арк.	3,8	7,6	11,4	15,2	19	22,8	26,6	30,4	34,2	38
15	Зошит 48 арк.	4,25	8,5	12,75	17	21,25	25,5	29,75	34	38,25	42,5
16	Зошит 96 арк.	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
17	Диск DVD	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7	33
18	Коректор	2,8	5,6	8,4	11,2	14	16,8	19,6	22,4	25,2	28
19	Скріпки	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15
20	Степлер	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250

ДОДАТОК 2

Приклад оформлення лабораторної роботи 2

$\alpha := 2.5 \qquad \beta := 4.8 \qquad \gamma := 6.2$

$m := \alpha^2 - \sqrt[3]{\beta} + \gamma \qquad m = 10.763$

$n := \gamma \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \qquad n = 18.822$

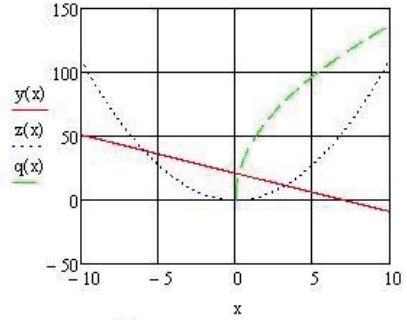
$k := \sin(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma^4 \qquad k = -792.858$

$m(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha^2 - \sqrt[3]{\beta} + \gamma \qquad m(2.5, 4.8, 6.2) = 10.763$

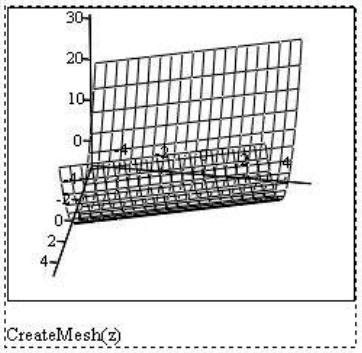
$n(\alpha, \beta, \gamma) := \gamma \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \qquad n(2.5, 4.8, 6.2) = 18.822$

$k(\alpha, \beta, \gamma) := \sin(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma^4 \qquad k(2.5, 4.8, 6.2) = -792.858$

$y(x) := 21 - 3 \cdot x \qquad z(x) := 1.1 \cdot x^2 \qquad q(x) := 43.2 \cdot \sqrt{x}$



$z(x, y) := x^2 + y$



ДОДАТОК 3

Приклад оформлення лабораторної роботи 3

Матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1	0,037	0,121	0,131	0,026	0,027	0,073	0,092	0,093	0,196	0,053	0,849
2	0,031	0,099	0,112	0,225	0,098	0,062	0,082	0,078	0,168	0,045	1
3	0,076	0,081	0,011	0,041	0,023	0,058	0,069	0,076	0,014	0,041	0,49
4	0,038	0,044	0,05	0,099	0,044	0,028	0,035	0,033	0,074	0,021	0,466
5	0,037	0,01	0,043	0,098	0,01	0,022	0,034	0,033	0,072	0,019	0,378
6	0,014	0,014	0,051	0,035	0,037	0,033	0,013	0,128	0,027	0,023	0,375
7	0,072	0,017	0,015	0,029	0,013	0,079	0,166	0,014	0,021	0,058	0,484
8	0,011	0,016	0,012	0,028	0,012	0,024	0,098	0,071	0,021	0,052	0,345
9	0,051	0,055	0,107	0,067	0,013	0,014	0,039	0,047	0,076	0,027	0,496
10	0,019	0,022	0,023	0,048	0,022	0,014	0,017	0,018	0,037	0,011	0,231
Σ	0,386	0,479	0,555	0,696	0,299	0,407	0,645	0,591	0,706	0,35	

Одинична матриця

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Продовження додатка 3

Матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,112	0,211	0,232	0,153	0,081	0,146	0,215	0,198	0,315	0,119
2	0,116	1,197	0,226	0,377	0,161	0,142	0,213	0,190	0,306	0,115
3	0,116	0,132	1,071	0,115	0,057	0,104	0,145	0,139	0,091	0,081
4	0,078	0,092	0,106	1,170	0,074	0,067	0,098	0,087	0,143	0,055
5	0,069	0,048	0,086	0,149	1,032	0,053	0,084	0,076	0,124	0,046
6	0,039	0,043	0,082	0,078	0,055	1,059	0,061	0,170	0,066	0,049
7	0,114	0,060	0,065	0,084	0,039	0,126	1,244	0,068	0,083	0,096
8	0,037	0,041	0,040	0,066	0,029	0,052	0,150	1,104	0,057	0,077
9	0,097	0,112	0,167	0,142	0,045	0,059	0,112	0,109	1,150	0,066
10	0,039	0,046	0,051	0,083	0,037	0,033	0,048	0,045	0,071	1,028

Модель міжгалузевого балансу

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі										Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	148,601	257,491	202,819	27,059	24,291	46,673	83,331	61,057	235,568	28,355	2901	4016,245
2	124,504	210,674	173,402	234,163	88,168	39,640	74,274	51,209	201,915	24,075	906	2128,024
3	305,235	172,370	17,031	42,670	20,692	37,083	62,498	49,896	16,826	21,935	802	1548,236
4	152,617	93,633	77,412	103,032	39,586	17,902	31,702	21,665	88,939	11,235	403	1040,723
5	148,601	21,280	66,574	101,991	8,997	14,066	30,796	21,665	86,535	10,165	389	899,671
6	56,227	29,792	78,960	36,425	33,288	21,099	11,775	84,035	32,451	12,305	243	639,358
7	289,170	36,176	23,224	30,181	11,696	50,509	150,359	9,191	25,239	31,030	249	905,775
8	44,179	34,048	18,579	29,140	10,796	15,345	88,766	46,613	25,239	27,820	316	656,526
9	204,828	117,041	165,661	69,728	11,696	8,951	35,325	30,857	91,343	14,445	452	1201,876
10	76,309	46,817	35,609	49,955	19,793	8,951	15,398	11,817	44,469	5,885	220	535,003
Умовно чиста продукція	2465,974	1108,700	688,965	316,380	630,669	379,139	321,550	268,519	353,351	347,752	6881	$\sum z_i$
Валовий продукт	4016,245	2128,024	1548,236	1040,723	899,671	639,358	905,775	656,526	1201,876	535,003	6881	$\sum y_i$

ДОДАТОК 4

Приклад оформлення лабораторної роботи 4

Обмеження	Керовані змінні		Права частина обмеження
	x_1	x_2	
Max реалізація продукції A	0,30	0,05	2,10
Max реалізація продукції B	0,25	0,20	2,80
Max реалізація продукції C	0,05	0,40	4,60
Max реалізація продукції D	0,35	0,10	2,60
Max реалізація продукції E	0,05	0,25	4,00
Цільова функція	6,30	7,20	max
Значення КЗ	2,222	11,222	
Max реалізація продукції A	0,667	0,561	1,228
Max реалізація продукції B	0,556	2,244	2,8
Max реалізація продукції C	0,111	4,489	4,6
Max реалізація продукції D	0,778	1,122	1,9
Max реалізація продукції E	0,111	2,806	2,917
Цільова функція	14	80,8	94,8

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [Книга1.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.08.2012 18:58:08

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$D$20	Цільова функ	94,8

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$14	Значення КЗ x	2,222	0	80,8	2,222	94,800
$C$14	Значення КЗ x	11,222	0	14	11,222	94,800

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [Книга1.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.08.2011 18:58:08
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0 секунд.
Число итераций: 4 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$D$20	Цільова функція max	0	94,8

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$14	Значення КЗ x1	0,000	2,222	Продолжить
$C$14	Значення КЗ x2	0,000	11,222	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$D$15	Max реалізація продукції A max	1,227777778	$D$15<=$D$8	Без привязки	0,872222222
$D$16	Max реалізація продукції B max	2,8	$D$16<=$D$9	Привязка	0
$D$17	Max реалізація продукції C max	4,6	$D$17<=$D$10	Привязка	0
$D$18	Max реалізація продукції D max	1,9	$D$18<=$D$11	Без привязки	0,7
$D$19	Max реалізація продукції E max	2,916666667	$D$19<=$D$12	Без привязки	1,083333333

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Книга1.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.08.2012 18:58:08

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$14	Значення КЗ x1	2,222222222	0	6,3	2,7	5,4
$C$14	Значення КЗ x2	11,22222222	0	7,2	43,2	2,16

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$15	Max реалізація продукції A max	1,227777778	0	2,1	1E+30	0,872222222
$D$16	Max реалізація продукції B max	2,8	24	2,8	0,466666667	1E+30
$D$17	Max реалізація продукції C max	4,6	6	4,6	1,857142857	1,4
$D$18	Max реалізація продукції D max	1,9	0	2,6	1E+30	0,7
$D$19	Max реалізація продукції E max	2,916666667	0	4	1E+30	1,083333333

ДОДАТОК 5

Приклад оформлення лабораторної роботи 5

Визначення сумарних запасів, т.

Харків	Полтава	Донецьк	Одеса	Σa_i
120	120	80	105	425

Визначення сумарних потреб, т.

Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород	Σb_j
40	60	100	125	60	50	435

ТЗ несбалансована необхідно ввести фіктивного постачальника із 10

Транспортна матриця

Виробничі бази	Оптові центри продажів						Запаси
	Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород	
Харків	19,58	44,78	26,77	34,14	61,88	67,5	120
Полтава	9,01	53,14	31,07	24,8	57,97	64,69	120
Донецьк	37,6	43,61	200	51,18	66,59	71,29	80
Одеса	34,14	37,6	60,91	44,78	48,57	60,91	105
Фіктивн.	200	200	200	200	200	200	10
Потреби	40	60	100	125	60	50	

Об'єми перевезень

Виробничі бази	Оптові центри продажів						Запаси
	Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород	
Харків	0	0	100	20	0	0	120
Полтава	40	0	0	80	0	0	120
Донецьк	0	60	0	20	0	0	80
Одеса	0	0	0	5	60	40	105
Фіктивн.	0	0	0	0	0	10	10
Потреби	40	60	100	125	60	50	

Цільова функція

Виробничі бази	Оптові центри продажів						Мінвартість перевезень
	Кременчук	Сімферополь	Луганськ	Київ	Львів	Ужгород	
Харків	0	0	2677	682,8	0	0	14918,9
Полтава	360,4	0	0	1984	0	0	Цільова
Донецьк	0	2616,6	0	1023,6	0	0	комірка
Одеса	0	0	0	223,9	2914,2	2436	16918,9
Фіктивн.	0	0	0	0	0	2000	2000

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [ЛР_Т3.xlsx]Лист1
Отчет создан: 09.04.2012 23:17:56
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,032 секунд.
Число итераций: 19 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время 1000 с, Число итераций 1000, Precision 0,001, Использовать автоматическое масштаб
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов,
Целочисленное отклонение 5%, Решение без целочисленных ограничений, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$H$41	Одеса Цільова комірка	0	16918,9

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$28	Харків Кременчук	0	0	Продолжить
$C$28	Харків Сімферополь	0	0	Продолжить
$D$28	Харків Луганськ	0	100	Продолжить
$E$28	Харків Київ	0	20	Продолжить
$F$28	Харків Львів	0	0	Продолжить
$G$28	Харків Ужгород	0	0	Продолжить
$B$29	Полтава Кременчук	0	40	Продолжить
$C$29	Полтава Сімферополь	0	0	Продолжить
$D$29	Полтава Луганськ	0	0	Продолжить
$E$29	Полтава Київ	0	80	Продолжить
$F$29	Полтава Львів	0	0	Продолжить
$G$29	Полтава Ужгород	0	0	Продолжить
$B$30	Донецьк Кременчук	0	0	Продолжить
$C$30	Донецьк Сімферополь	0	60	Продолжить
$D$30	Донецьк Луганськ	0	0	Продолжить
$E$30	Донецьк Київ	0	20	Продолжить
$F$30	Донецьк Львів	0	0	Продолжить
$G$30	Донецьк Ужгород	0	0	Продолжить
$B$31	Одеса Кременчук	0	0	Продолжить
$C$31	Одеса Сімферополь	0	0	Продолжить
$D$31	Одеса Луганськ	0	0	Продолжить
$E$31	Одеса Київ	0	5	Продолжить
$F$31	Одеса Львів	0	60	Продолжить
$G$31	Одеса Ужгород	0	40	Продолжить
$B$32	Фіктивн. Кременчук	0	0	Продолжить
$C$32	Фіктивн. Сімферополь	0	0	Продолжить
$D$32	Фіктивн. Луганськ	0	0	Продолжить
$E$32	Фіктивн. Київ	0	0	Продолжить
$F$32	Фіктивн. Львів	0	0	Продолжить
$G$32	Фіктивн. Ужгород	0	10	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$B$33	Потреби Кременчук	40	$B$33=$B$23	Привязка	0
$C$33	Потреби Сімферополь	60	$C$33=$C$23	Привязка	0
$D$33	Потреби Луганськ	100	$D$33=$D$23	Привязка	0
$E$33	Потреби Київ	125	$E$33=$E$23	Привязка	0
$F$33	Потреби Львів	60	$F$33=$F$23	Привязка	0
$G$33	Потреби Ужгород	50	$G$33=$G$23	Привязка	0
$H$28	Харків Запаси	120	$H$28=$H$18	Привязка	0
$H$29	Полтава Запаси	120	$H$29=$H$19	Привязка	0
$H$30	Донецьк Запаси	80	$H$30=$H$20	Привязка	0
$H$31	Одеса Запаси	105	$H$31=$H$21	Привязка	0
$H$32	Фіктивн. Запаси	10	$H$32=$H$22	Привязка	0

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [ЛР_Т3.xlsx]Лист1
Отчет создан: 09.04.2012 23:17:56

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$28	Харків Кременчук	0	1,23	19,58	1E+30	1,23
$C$28	Харків Сімферополь	0	18,21	44,78	1E+30	18,21
$D$28	Харків Луганськ	100	0	26,77	13,64	1E+30
$E$28	Харків Київ	20	0	34,14	1,23	13,64
$F$28	Харків Львів	0	23,95	61,88	1E+30	23,95
$G$28	Харків Ужгород	0	17,23	67,5	1E+30	17,23
$B$29	Полтава Кременчук	40	0	9,01	1,23	1E+30
$C$29	Полтава Сімферополь	0	35,91	53,14	1E+30	35,91
$D$29	Полтава Луганськ	0	13,64	31,07	1E+30	13,64
$E$29	Полтава Київ	80	0	24,8	13,64	1,23
$F$29	Полтава Львів	0	29,38	57,97	1E+30	29,38
$G$29	Полтава Ужгород	0	23,76	64,69	1E+30	23,76
$B$30	Донецьк Кременчук	0	2,21	37,6	1E+30	2,21
$C$30	Донецьк Сімферополь	60	0	43,61	0,39	1E+30
$D$30	Донецьк Луганськ	0	156,19	200	1E+30	156,19
$E$30	Донецьк Київ	20	0	51,18	2,21	0,39
$F$30	Донецьк Львів	0	11,62	66,59	1E+30	11,62
$G$30	Донецьк Ужгород	0	3,98	71,29	1E+30	3,98
$B$31	Одеса Кременчук	0	5,15	34,14	1E+30	5,15
$C$31	Одеса Сімферополь	0	0,39	37,6	1E+30	0,39
$D$31	Одеса Луганськ	0	23,5	60,91	1E+30	23,5
$E$31	Одеса Київ	5	0	44,78	0,39	3,98
$F$31	Одеса Львів	60	0	48,57	11,62	1E+30
$G$31	Одеса Ужгород	40	0	60,91	3,98	12,34
$B$32	Фіктивн. Кременчук	0	31,92	200	1E+30	31,92
$C$32	Фіктивн. Сімферополь	0	23,7	200	1E+30	23,7
$D$32	Фіктивн. Луганськ	0	23,5	200	1E+30	23,5
$E$32	Фіктивн. Київ	0	16,13	200	1E+30	16,13
$F$32	Фіктивн. Львів	0	12,34	200	1E+30	12,34
$G$32	Фіктивн. Ужгород	10	0	200	12,34	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$33	Потреби Кременчук	40	28,99	40	0	5
$C$33	Потреби Сімферополь	60	37,21	60	0	5
$D$33	Потреби Луганськ	100	37,41	100	0	5
$E$33	Потреби Київ	125	44,78	125	0	5
$F$33	Потреби Львів	60	48,57	60	0	60
$G$33	Потреби Ужгород	50	60,91	50	0	40
$H$28	Харків Запаси	120	-10,64	120	5	0
$H$29	Полтава Запаси	120	-19,98	120	5	0
$H$30	Донецьк Запаси	80	6,4	80	5	0
$H$31	Одеса Запаси	105	0	105	0	1E+30
$H$32	Фіктивн. Запаси	10	139,09	10	40	0

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [ЛР_Т3.xlsx]Лист1
Отчет создан: 09.04.2012 23:17:57

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$H$41	Одеса Цільов	16918,9

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$28	Харків Креме	0	0	16918,9	0	16918,9
$C$28	Харків Сімфе	0	0	16918,9	0	16918,9
$D$28	Харків Луганс	100	100	16918,9	100	16918,9
$E$28	Харків Київ	20	20	16918,9	20	16918,9
$F$28	Харків Львів	0	0	16918,9	0	16918,9
$G$28	Харків Ужгор	0	0	16918,9	0	16918,9
$B$29	Полтава Крем	40	40	16918,9	40	16918,9
$C$29	Полтава Сімф	0	0	16918,9	0	16918,9
$D$29	Полтава Луга	0	0	16918,9	0	16918,9
$E$29	Полтава Київ	80	80	16918,9	80	16918,9
$F$29	Полтава Львів	0	0	16918,9	0	16918,9
$G$29	Полтава Ужго	0	0	16918,9	0	16918,9
$B$30	Донецьк Кре	0	0	16918,9	0	16918,9
$C$30	Донецьк Сімф	60	60	16918,9	60	16918,9
$D$30	Донецьк Луга	0	0	16918,9	0	16918,9
$E$30	Донецьк Київ	20	20	16918,9	20	16918,9
$F$30	Донецьк Льві	0	0	16918,9	0	16918,9
$G$30	Донецьк Ужг	0	0	16918,9	0	16918,9
$B$31	Одеса Креме	0	0	16918,9	0	16918,9
$C$31	Одеса Сімфер	0	0	16918,9	0	16918,9
$D$31	Одеса Луганс	0	0	16918,9	0	16918,9
$E$31	Одеса Київ	5	5	16918,9	5	16918,9
$F$31	Одеса Львів	60	60	16918,9	60	16918,9
$G$31	Одеса Ужгор	40	40	16918,9	40	16918,9
$B$32	Фіктивн. Крем	0	0	16918,9	0	16918,9
$C$32	Фіктивн. Сімф	0	0	16918,9	0	16918,9
$D$32	Фіктивн. Луга	0	0	16918,9	0	16918,9
$E$32	Фіктивн. Київ	0	0	16918,9	0	16918,9
$F$32	Фіктивн. Львів	0	0	16918,9	0	16918,9
$G$32	Фіктивн. Ужго	10	10	16918,9	10	16918,9

ДОДАТОК 6

Приклад оформлення лабораторної роботи 6

Матриця задачі про призначення

Претенденти	Посади							Кількість перетендентів
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2	Фіктивна 1	Фіктивна 2	
Працюючий 1	11	0	0	8	8	0	0	1
Працюючий 2	0	9	0	12	7	0	0	1
Працюючий 3	0	0	12	9	9	0	0	1
Новий 1	7	12	6	10	8	1	1	1
Новий 2	8	4	8	6	11	1	1	1
Новий 3	3	5	10	3	7	1	1	1
Новий 4	10	6	6	11	8	1	1	1
Кількість посад	1	1	1	1	1	1	1	

Відомості про призначення претендентів на посади

Претенденти	Посади							Кількість перетендентів
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2	Фіктивна 1	Фіктивна 2	
Працюючий 1	1	0	0	0	0	0	0	1
Працюючий 2	0	0	0	1	0	0	0	1
Працюючий 3	0	0	1	0	0	0	0	1
Новий 1	0	1	0	0	0	0	0	1
Новий 2	0	0	0	0	1	0	0	1
Новий 3	0	0	0	0	0	1	0	1
Новий 4	0	0	0	0	0	0	1	1
Кількість посад	1	1	1	1	1	1	1	

Цільова функція

Претенденти	Посади							
	Існуюча 1	Існуюча 2	Існуюча 3	Нова 1	Нова 2	Фіктивна 1	Фіктивна 2	
Працюючий 1	11	0	0	0	0	0	0	Цільова функція
Працюючий 2	0	0	0	12	0	0	0	
Працюючий 3	0	0	12	0	0	0	0	
Новий 1	0	12	0	0	0	0	0	
Новий 2	0	0	0	0	11	0	0	
Новий 3	0	0	0	0	0	1	0	
Новий 4	0	0	0	0	0	0	1	60

ДОДАТОК 7

Приклад оформлення лабораторної роботи 7

Безумовна оптимізація									
Характеристики продукції	Розміри замовлення							30	Загальний період часу, днів
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7		
Інтенсивність витрат запасів продукції, од./день	200	170	310	150	280	300	210		
Витрати на створення партії запасу продукції, грн	23	19	17	16	21	16	17		
Витрати на зберігання одиниці продукції, грн/день	3	2,5	4	4,2	3	4	3,1		
Ціна за одиницю, грн	680	720	800	905	1000	640	750		
Об`єм, що займає одиниця продукції на складі, $м^3$	20	15	17	12	17	10	8		
Оптимальний розмір замовлення, од.	55,38	50,83	51,33	33,81	62,61	48,99	47,99		
Витрати на створення запасів, грн	2491,99	1906,24	3079,94	2129,79	2817,45	2939,39	2231,62	17596,41	Сумарні витрати на створення запасів, грн
Витрати на зберігання замовленої партії продукції, грн	2491,99	1906,24	3079,94	2129,79	2817,45	2939,39	2231,62	17596,41	Сумарні витрати на зберігання запасів, грн
Витрати на створення та зберігання запасу, грн	4983,97	3812,48	6159,87	4259,58	5634,89	5878,78	4463,25	35192,82	Сумарні витрати, грн
Вартість замовлення, грн	37656,7	36599,8	41065,8	30594,6	62609,9	31353,5	35994,0	275874,2	Сумарна вартість замовлення, грн
Об`єм, що займає замовлена продукція на складі, $м^3$	1107,55	762,50	872,65	405,67	1064,37	489,90	383,94	5086,57	Сумарний обєм, що займає продукція на складі, $м^3$

Умовна оптимізація

Характеристики продукції	Розміри замовлення								
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	30	Загальний період часу, днів
Інтенсивність витрат запасів продукції, од./день	200	170	310	150	280	300	210		
Витрати на створення партії запасу продукції, грн	23	19	17	16	21	16	17		
Витрати на зберігання одиниці продукції, грн/день	3	2,5	4	4,2	3	4	3,1		
Ціна за одиницю, грн	680	720	800	905	1000	640	750	210000	Макс. бюджет, грн
Об`єм, що займає одиниця продукції на складі, $м^3$	20	15	17	12	17	10	8	6000	Об`єм складу, грн
Opt розмір замовлення, од.	42,80	37,31	40,65	26,39	44,37	40,33	36,60		
Витрати на створення запасів, грн	3224,19	2597,43	3889,27	2728,12	3975,84	3570,83	2925,94	22911,62	Сумарні витрати на створення запасів, грн
Витрати на зберігання замовленої партії продукції, грн	1926,06	1398,98	2439,02	1662,68	1996,56	2419,60	1702,07	13544,98	Сумарні витрати на зберігання запасів, грн
Витрати на створення та зберігання запасу, грн	5150,26	3996,41	6328,29	4390,80	5972,40	5990,44	4628,01	36456,60	Сумарні витрати, грн
Вартість замовлення, грн	29105,0	26860,4	32520,2	23884,6	44368,0	25809,1	27452,7	210000,00	Сумарна вартість замовлення, грн
Об`єм, що займає замовлена продукція на складі, $м^3$	856,03	559,59	691,05	316,70	754,26	403,27	292,83	3873,73	Сумарний обєм, що займає продукція на складі, $м^3$

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [ЛР_7.xlsx]Лист2
Отчет создан: 03.07.2012 14:47:57
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ
Время решения: 0,078 секунд.
Число итераций: 8 Число подзадач: 0

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$I$12	Витрати на створення та зберігання запасу, грн	892857,00	36456,60

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$9	Opt розмір замовлення, од. n1	1,00	42,80	Продолжить
$C$9	Opt розмір замовлення, од. n2	1,00	37,31	Продолжить
$D$9	Opt розмір замовлення, од. n3	1,00	40,65	Продолжить
$E$9	Opt розмір замовлення, од. n4	1,00	26,39	Продолжить
$F$9	Opt розмір замовлення, од. n5	1,00	44,37	Продолжить
$G$9	Opt розмір замовлення, од. n6	1,00	40,33	Продолжить
$H$9	Opt розмір замовлення, од. n7	1,00	36,60	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$I$13	Вартість замовлення, грн	210000,00	$I$13<=$I$7	Привязка	0
$I$14	Об`єм, що займає замовлена продукція на складі, м3	3873,73	$I$14<=$I$8	Без привязки	2126,3

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [ЛР_7.xlsx]Лист2
Отчет создан: 03.07.2012 14:47:57

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательно Значение	Приведенн. Градиент
$B$9	Opt розмір замовлення, од. n1	42,80143301	0
$C$9	Opt розмір замовлення, од. n2	37,30613448	0
$D$9	Opt розмір замовлення, од. n3	40,65025402	0
$E$9	Opt розмір замовлення, од. n4	26,3917855	0
$F$9	Opt розмір замовлення, од. n5	44,36797889	0
$G$9	Opt розмір замовлення, од. n6	40,32674159	0
$H$9	Opt розмір замовлення, од. n7	36,6036615	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательно Значение	Лагранжа Множитель
$I$13	Вартість замовлення, грн	210000	-0,04461058
$I$14	Об`єм, що займає замовлена п	3873,728771	0

Навчальне видання

СКВОРЧЕВСЬКИЙ Олександр Євгенович,
ТОВАЖНЯНСЬКИЙ В'ячеслав Леонідович

Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті. Лабораторний практикум

з курсу «Економіко-математичне моделювання»

для студентів спеціальностей 6.030601 – «Менеджмент», 6.030501 – «Економіка підприємства», 6.030509 – «Облік та аудит», 6.030507 – «Маркетинг», 6.030507 – «Інтелектуальна власність»
очної, заочної та дистанційної форм навчання

Роботу до видання рекомендував *М.І. Погорєлов*

Редактор Н.В. Верстюк

План 2013 р., поз. 54
Підп. до друку 12.07.13. Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Riso-друк.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. _____. Наклад 100 прим
Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ".61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.